



مجاز است.

استفاده از: --

در تمامی سوالات منظور از G یک گروه، R حلقه تعویض پذیر، N مجموعه اعداد طبیعی، Z اعداد صحیح و Q اعداد گویا می باشد.

۱. کدامیک از مجموعه های زیر به همراه عمل داده شده یک گروه است؟

- الف. Z^+ با عمل تقسیم معمولی اعداد
ب. N با عمل ضرب معمولی اعداد
ج. Q با عمل جمع معمولی اعداد
د. $\{0\} - Z$ با عمل ضرب معمولی اعداد
۲. رتبه ۲۴ در (Z_{200}, \oplus) برابر است با:
الف. ۵
ب. ۱۰
ج. ۲۵
د. ۲۰

۳. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

- الف. گروه \mathbb{Z} تایی کلاین دوری است
ب. هر گروه آبدی دوری است
ج. اگر x, y دو عضو از مرتبه متناهی گروه G باشند آنگاه همواره $o(xy) = o(x)o(y)$
د. اگر $G = \langle x \rangle$ آنگاه $G = \langle x^{-1} \rangle$

۴. فرض کنید G گروه دوری یک غیر بدیهی از مرتبه n باشد. کدام گزینه صحیح است؟

- الف. $G \cong Z$
ب. G دارای حداقل یک زیر گروه غیر دوری است.
ج. $Z(G) = \{e\}$

د. اگر عدد صحیح m عدد n را تقسیم کند G دارای زیرگروهی از مرتبه m است.

۵. تعداد مولدهای گروه (Z_{15}, \oplus) برابر است با:

- الف. ۸
ب. ۲
ج. ۱۰
د. ۱۲

۶. در عبارات زیر کدام گروه دوری است؟

- الف. $Z_{10} \times Z_7 \times Z_{15}$
ب. $Z_6 \times Z_{14}$
ج. $Z_4 \times Z_9 \times Z_{20}$
د. $Z_{36} \times Z_{25}$

۷. جایگشت $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ در S_5 را در نظر بگیرید. کدام عبارت صحیح است؟

- الف. f یک جایگشت زوج و $o(f) = 5$
ب. f یک جایگشت فرد و $o(f) = 5$
ج. f یک جایگشت زوج و $o(f) = 4$
د. f یک جایگشت فرد و $o(f) = 4$



مجاز است.

استفاده از:

۸. در مورد زیرگروه $H = \langle 2 \rangle$ از گروه $G = (Z_{12}, \oplus)$ کدام گزینه صحیح است؟
 الف. H در G نرمال است.
 ج. H سه زیرگروه متمایز دارد.
 ۹. رتبه گروه $\frac{Z_4 \times Z_6}{\langle (2,1) \rangle}$ برابر است با:
 الف. ۲۴
 ب. ۶
 ج. ۴
 د. ۱۲
۱۰. گروه G یک گروه از مرتبه ۱۸ است. کدام گزینه صحیح است؟
 الف. گروه G با $Z_3 \times Z_6$ یکسان است.
 ب. گروه G با Z_{18} یکسان است.
 ج. اگر گروه G آبلی باشد با Z_{18} یکسان است.
 د. اگر گروه G دوری باشد با Z_{18} یکسان است.
۱۱. فرض کنید $\varphi: G \rightarrow H$ همسانی باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟
 الف. اگر G آبلی باشد، آنگاه H آبلی است.
 ب. اگر $K \triangleleft G$ آنگاه $\varphi(K) \triangleleft H$
 ج. اگر φ همسانی پوشا و G دوری باشد، آنگاه H دوری است.
 د. φ یک به یک است اگر فقط $\ker(\varphi) = G$.
۱۲. گروه جمعی $(Z, +)$ را در نظر بگیرید. در این صورت گروه $\frac{3Z}{3Z \cap 5Z}$ با کدام زیرگروه یکسان است؟
 الف. Z_5
 ب. $5Z$
 ج. $15Z$
 د. Z_{15}
۱۳. اگر H, K دو زیرگروه از G باشند کدام گزینه صحیح است؟
 الف. $(H \cup K) \leq G$
 ب. اگر $H \triangleleft G$ آنگاه همواره $(H \cap K) \triangleleft G$
 ج. اگر $H \triangleleft G$ آنگاه همواره $\frac{K}{H} \triangleleft \frac{G}{H}$
 د. اگر $K \triangleleft G$ آنگاه $HK = KH$
۱۴. اگر H_1 و H_2 دو زیرگروه نرمال غیربدهی از گروه G باشند، بطوریکه $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟
 الف. $H_1 \times H_2 = \{e\}$
 ب. $H_1 \times H_2 = H_1 H_2$
 ج. $H_1 \times H_2 = H_1$ یا $H_1 \times H_2 = H_2$
 د. $H_1 \times H_2 = Z(H_1 \times H_2)$
۱۵. اگر X یک مجموعه سه عضوی با مجموعه توانی $P(X)$ و Δ نماد تفاضل متقارن باشد، آنگاه تعداد مقسوم علیه های صفر حلقه $(P(X), \Delta, \cap)$ کدام است؟
 الف. ۷
 ب. ۸
 ج. ۳
 د. ۲



مجاز است.

استفاده از:

۱۶. قلمرو صحیح R یک میدان است هرگاه

الف. R متناهی باشد.

ب. R نامتناهی باشد.

ج. به ازای هر $a, b \in R$ ، اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه $ab \neq 0$.

د. گروه جمعی R ، دوری باشد.

۱۷. کدام عبارت صحیح است؟

الف. $6Z$ زیرحلقه $(Z, +, \cdot)$ است.

ب. Z یک ایده آل $(Q, +, \cdot)$ است.

د. $\frac{2Z}{4Z}$ یک میدان است.

ج. $\{0\}$ ایده آل ماکسیمال $(Z, +, \cdot)$ است.

۱۸. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و I, J دو ایده آل آن باشند در این صورت کدام گزینه همواره برقرار است؟

الف. $I + J \subseteq IJ$

ب. $IJ \subseteq I \cap J$

ج. $I \subseteq IJ$

د. $J \subseteq I \cap J$

۱۹. کدام گزینه مشخصه یک میدان متناهی است؟

الف. ۱۰

ب. ۳

ج. ۲۵

د. ۶

۲۰. تعداد همسانی های غیرصفر از $(Z, +, \cdot)$ به خودش برابر است با:

الف. صفر

ب. ۱۰

ج. ۲۰

د. بی نهایت.

سوالات تشریحی

بارم هر سوال ۲ نمره می باشد.

۱. الف: قضیه لاگرانژ را بیان و ثابت کنید.

ب. فرض کنید H, K زیرگروههایی متناهی از گروه G باشند به طوری که $(|H|, |K|) = 1$ ثابت کنید $H \cap K = \{e\}$.

۲. نشان دهید هر گروه دلخواه G با زیرگروهی از S_G (گروه متقارن روی G) یکسان است.

۳. فرض کنید H یک زیرگروه G است به طوری که $[G: H] = 2$ ، ثابت کنید H در G نرمال است.

۴. الف. فرض کنید R, T دو حلقه و $\varphi: R \rightarrow T$ یک همسانی پوشا باشد. نشان دهید $\frac{R}{\ker \varphi} = T$.

ب. اگر در حالت (الف) R, T دو قلمرو صحیح باشند، ثابت کنید $\ker \varphi$ ایده آل اول حلقه R است.

۵. نشان دهید که عضو a در (Z_n, \oplus, \odot) یکه است اگر و فقط اگر $(a, n) = 1$.