



مجاز است.

استفاده از:

۱. فرض کنیم $\alpha = \sup A$. در این صورت

الف. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x$ ، ب. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A, \alpha + \varepsilon > x$

ج. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A, \alpha - \varepsilon > x$ ، د. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A, \alpha + \varepsilon < x$

۲. فرض کنید $A = \{P \in \mathbb{Q} \mid P > 0, P^2 < 2\}$. کدام گزینه زیر صحیح نمی باشد؟

الف. A از بالا کراندار است. ب. $\sup A = \sqrt{2}$

ج. A دارای عضو ماکسیمم است. د. A از پایین کراندار است.

۳. در مورد دنباله $a_n = \cos n$ کدام گزینه صحیح است؟

الف. یک زیر دنباله همگرا دارد. ب. هر زیر دنباله آن همگرا است.

ج. حد دنباله بینهایت است. د. هیچ زیر دنباله همگرا ندارد.

۴. حد پایین دنباله $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cos n\pi \right\}$ کدام است؟

الف. e ب. $-e$ ج. $\frac{e}{2}$ د. $-\frac{e}{2}$

۵. کدام سری واگراست؟

الف. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

۶. کدام سری همگراست؟

الف. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)}$ د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

۷. در فضای متریک (N, d) که $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ مجموعه $S\left(2, \frac{1}{5}\right)$ برابر است با

الف. N ب. $\{2\}$ ج. $\{2, 3\}$ د. $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$



مجاز است.

استفاده از:

۸. فرض کنیم $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ در این صورت $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

الف. مجموعه‌ای بسته است. ب. مجموعه‌ای باز است.

ج. هم باز و هم بسته است. د. نه باز و نه بسته است.

۹. اگر M فضای متریک و $A \subseteq M$ ، آنگاه A را فشرده گوئیم هرگاه

الف. A دارای یک پوشش باز باشد.

ب. A دارای پوشش باز متناهی باشد.

ج. هر پوشش باز A دارای زیرپوشش متناهی باشد.

د. A پوشش متناهی داشته باشد.

۱۰. اگر $X \subseteq \mathbb{R}$ ، $X = (-1, 2) \cup \{3\}$ ، آنگاه کدامیک از مجموعه‌های زیر در X فشرده است؟

الف. $[-1, 0]$ ب. $[0, 1]$ ج. $\{-1\}$ د. $(-1, 2)$

۱۱. کدام گزینه صحیح است؟

الف. N یک زیر مجموعه همبند R می‌باشد. ب. $(0, 1]$ زیر مجموعه‌ای فشرده از R است.

ج. Q کامل نیست. د. Q در R باز است ولی بسته نیست.

۱۲. فرض کنید X فضای متریک، $A \subseteq X$ همبند و $B \subseteq \bar{A}$ کدامیک از مجموعه‌های زیر همواره همبند است؟

الف. B ب. A° ج. $A \cup B$ د. $A \cap B$

۱۳. شرط لازم و کافی برای آنکه زیر مجموعه A از R فشرده باشد کدام است؟

الف. A کراندار و بسته باشد. ب. A کراندار و باز باشد.

ج. A باز و متناهی باشد. د. A بسته و نامتناهی باشد.

۱۴. تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in Q \\ \cos x & x \notin Q \end{cases}$ در کدام نقاط دارای حد است؟

الف. اعداد گویا ب. اعداد حقیقی ج. فقط در $x = \frac{\pi}{4}$ د. $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$



مجاز است.

استفاده از:

۱۵. اگر $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ تابع پیوسته باشد آنگاه

الف. اگر $V \subseteq Y$ باز باشد، $f^{-1}(V) \subseteq X$ باز است.

ب. اگر $U \subseteq X$ باز باشد، $f(U) \subseteq Y$ باز است.

ج. اگر f ، یک به یک و $V \subseteq Y$ باشد، $f^{-1}(V) \subseteq X$ نیز پیوسته است.

د. همواره f پیوسته یکنواخت است.

۱۶. کدام تابع بر بازه داده شده، پیوسته یکنواخت نیست؟

الف. $f(x) = \frac{1}{x}$ بر $(0, 1]$ ب. $f(x) = \frac{1}{x}$ بر $[1, 2]$

ج. $f(x) = x^2$ بر $[-1, 1]$ د. $f(x) = \sqrt{x}$ بر $[1, +\infty)$

۱۷. اگر f بر (a, b) صعودی باشد آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

الف. اگر f در نقطه $x \in (a, b)$ ، ناپیوسته باشد آنگاه ناپیوستگی آن از نوع دوم است.

ب. مجموعه نقاط ناپیوستگی f بر (a, b) متناهی یا شماراست.

ج. حد چپ و راست f در هر نقطه از (a, b) موجود است.

د. همواره حد راست تابع f در نقطه $x \in (a, b)$ بزرگتر یا مساوی حد چپ f در این نقطه است.

۱۸. کدام گزینه صحیح است؟

الف. در توابع مختلط قضیه هوپیتال برقرار است.

ب. اگر f بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشد آنگاه ممکن است f' بر $[a, b]$ دارای ناپیوستگی ساده داشته باشد.

ج. اگر f در نقطه c از (a, b) دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته و $f'(c) = 0$ موجود باشد آنگاه $f'(c) = 0$.

د. اگر f بر (a, b) مشتق پذیر و برای هر $x \in (a, b)$ ، $f'(x) = 0$ ، آنگاه f نه صعودی و نه نزولی است.

۱۹. اگر $f(0) = 1$ ، $f'(x) = 1 + (f(x))^{10}$ ، آنگاه ضریب x^{10} در بسط تیلور (به ازای $x = 0$) این تابع کدام است؟

الف. ۲ ب. ۲۰ ج. ۱۰ د. ۱

۲۰. اگر $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ آنگاه:

الف. $f'(0) = 0$ ب. $f'(0) = 1$ ج. $f'(0) = -1$ د. $f'(0)$ موجود نیست.



مجاز است.

استفاده از:

«سؤالات تشریحی»

* بارم هر سؤال ۲ نمره می باشد.

۱. اگر A یک مجموعه غیر تهی از اعداد حقیقی و از پایین کراندار باشد آنگاه A ، انیفیمم دارد.

۲. به ازای چه مقادیری از $P \in R$ ، سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^P}$ همگراست؟ (دلیل ادعای خود را بیان کنید)

۳. قضیه هانیه - بول را بیان و ثابت نمایید.

۴. الف) اگر $f : X \rightarrow Y$ پیوسته و $E \subseteq X$ همبند باشد نشان دهید $f(E)$ همبند است.

ب) نشان دهید مجموعه $E = \{x + \sin x, x \in [0, 2]\}$ همبند است.

۵. فرض کنید تابع f بر $(0, 1]$ مشتق پذیر باشد و $|f'(x)| < 1$ بر $(0, 1]$. اگر $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ ($n \in N$)، آنگاه نشان دهید

$\{a_n\}$ همگراست.