



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی/ کد درس: ریاضی (کاربردی-محض) - جبرانی ارشد ۱۱۱۱۰۴۲

مجاز است.

استفاده از:

۱. کدامیک از گروههای زیر حلپذیر نیست؟

ب. گروه جمعی  $Z_n$

الف. گروه  $D_n$  برای هر عدد طبیعی  $n$

د.  $S_4$

ج. گروههای غیر آبلی ساده

۲. کدام گزینه صحیح نیست؟

الف. برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $S_n$  حلپذیر است.

ب. هر زیر گروه یک گروه حلپذیر، حلپذیر است.

ج. گروه خارج قسمتی از هر گروه حلپذیر، حلپذیر است.

د.  $H$  و  $K$  حلپذیرند اگر و فقط اگر  $H \times K$  حلپذیر باشد.

۳. فرض کنید  $P$  یک ایده ال اول ناصفر از  $F[x]$  باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

الف.  $P$  ماکسیمال است.

ب.  $P = (f)$  برای چند جمله ای تحویل ناپذیر  $f \in F[x]$ .

ج.  $\frac{F[x]}{P}$  یک میدان است.

د.  $P = (f)$  که در آن  $f \in F[x]$  و  $x|f$ .

۴. کدامیک از چند جمله ایهای زیر در  $Q[x]$  تحویل ناپذیر است؟

ب.  $1 + x + x^2 + x^3$

الف.  $1 + x + x^2$

د.  $1 + x^2$

ج.  $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

۵. چندجمله ای مینیمال  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  روی  $Q$  کدامست؟

ب.  $x^4 + 10x^2 + 1$

الف.  $x^4 - 10x^2 + 1$

د.  $x^4 + 10x^2 - 1$

ج.  $x^4 - 10x^2 - 1$

۶. کدامیک از اعداد زیر روی  $Q$  جبری است؟

د.  $\sqrt{e}$

ج.  $e^2$

ب.  $1 - \sqrt[3]{5}$

الف.  $2 + \pi$

۷. تعداد  $Q$ -خودریختیهای میدان  $Q(\sqrt[3]{2})$  کدامست؟

د. ۳

ج. ۲

ب. ۱

الف. صفر

۸. فرض کنید  $F < K$  و  $u \in F$  روی  $K$  جبری باشد. تابع  $\theta_u: k[x] \rightarrow F$  را با ضابطه  $\theta_u(f) = f(u)$  در نظر بگیرید در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

الف.  $K(x) \cong k(u)$

ب.  $k(u) = k[u]$

ج. اگر  $f$  چند جمله ای می نیمال  $u$  روی  $k$  باشد آنگاه  $f|g$  به ازای هر  $g$  که  $g(u) = 0$

د. اگر  $[k(u): k] = \deg f$  که در آن  $f$  چند جمله ای می نیمال  $u$  روی  $k$  است.



مجاز است.

استفاده از:

۹. اگر  $F = Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  در این صورت

الف.  $[F: Q] = 1$

ب.  $[F: Q] = 2$

ج.  $[F: Q] = 3$

د.  $[F: Q] = 4$

۱۰. اگر  $u = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}}$ ،  $F = Q(u)$  و  $E = Q(\sqrt{3})$  آنگاه

الف.  $E < Q < F$

ب.  $Q < E < F$

ج.  $Q < F < E$

د.  $E < F < Q$

۱۱. فرض کنید  $G = Gal_{\mathbb{R}} C$ . در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

الف.  $C = R(i)$  میدان شکافنده چند جمله ای تحویل ناپذیر  $f(x) = x^2 + 1$  روی  $R$  است.

ب.  $\{1, i\}$  پایه ای برای  $C$  روی  $R$  است.

ج.  $[C: R] = 3$

د. عنصر  $i$  دارای چند جمله ای مینیمال  $x^2 + 1$  روی  $R$  است.

۱۲. میدان شکافنده  $f(x) = x^2 + 5$  روی  $R$  کدام است؟

الف.  $Q(i\sqrt{5})$

ب.  $C$

ج.  $Q(i, \sqrt{5})$

د.  $Q(i)$

۱۳. فرض کنید  $w = \sqrt[4]{2}$  و  $F = Q(w, i)$ . در این صورت  $[F: Q]$  کدام است؟

الف. ۲

ب. ۴

ج. ۶

د. ۸

۱۴. فرض کنید  $K < F$  و  $G = Gal_{\mathbb{R}} F$  و  $K < L < F$  و  $H$  زیر گروه  $G$  باشد. در این صورت

الف.  $H' = H'''$

ب.  $H = H'''$

ج.  $L = L''$

د.  $L' = L''$

۱۵. فرض کنید  $f = Q(w)$  که در آن  $w = \sqrt[5]{2}$  در این صورت:

الف.  $Q'' = F''$

ب.  $Q'' = F$

ج.  $Q$  در  $F$  بسته است.

د. گروه گالوای  $F$  روی  $Q$  بیش از یک عضو دارد.

۱۶. مرتبه گروه گالوای  $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$  روی  $Q$  برابر است با:

الف. ۸

ب. ۲

ج. ۴

د. ۱

۱۷. فرض کنید  $f(x) = x^5 + 5x^4 - 5 \in Q[x]$ . در این صورت گروه گالوای  $f$  روی  $Q$  با کدام گروه یکرخت است؟

الف.  $S_3$

ب.  $S_5$

ج.  $A_3$

د.  $D_4$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

نام درس: جبر ۲

رشته تحصیلی / کُد درس: ریاضی (کاربردی-محض) - جبرانی ارشد ۱۱۱۱۰۴۲

مجاز است.

استفاده از:

۱۸. فرض کنید  $K$  میدانی از مشخصه صفر باشد و  $K < F$  که  $[F:K]$  متناهی است و  $G = Gal_K F$ . در این صورت کدام گزینه معادل با بقیه نیست؟

- الف.  $F$  یک توسیع نرمال  $K$  است.  
ب.  $o(G) = [F:K]$ .  
ج.  $G$  حلپذیر است.  
د.  $K$  در  $F$  بسته است.

۱۹. کدامیک از چند ضلعی‌های زیر ساختپذیر نیست؟

- الف. مربع  
ب. مثلث متساوی الاضلاع  
ج. ۵ ضلعی منتظم  
د. ۷ ضلعی منتظم

۲۰. فرض کنید  $f, g \in Z[x]$  و  $p$  یک عدد اول باشد. اگر از  $\widehat{f}$  برای نمایش تصویر  $f$  تحت تابع  $Z[x] \rightarrow Z_p[x]$  استفاده کنیم آنگاه کدام گزینه در حلقه چند جمله‌ای‌های  $Z_p[x]$  نادرست است؟

- الف.  $\widehat{fg} = g\widehat{f}$   
ب.  $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$   
ج. اگر در  $Z[x]$ ،  $f|g$  آنگاه در  $Z_p[x]$ ،  $\widehat{f}|\widehat{g}$   
د. اگر در  $Z_p[x]$ ،  $f_p$  را با ضابطه  $f_p(x) = f(x^p)$  تعریف کنیم آنگاه،  $\widehat{f}_p = (\widehat{f})^p$ .

سئوالات تشریحی

بارم هر سوال ۲ نمره

۱. نشان دهید برای هر میدان  $F$ ،  $F[x]$  حوزه ایده آل اصلی است.

۲. فرض کنید  $K$  یک میدان و  $f$  یک عنصر تحویل ناپذیر تکین از درجه  $n$  در  $K[x]$  باشد. در این صورت یک توسیع ساده  $F = K(u)$  از  $K$  وجود دارد که  $u$  روی  $K$  جبری با چند جمله‌ای مینیمال  $f$  است.

۳. فرض کنید  $K < F$ . در این صورت احکام زیر معادلند:

- الف.  $[F:K]$  متناهی است.  
ب.  $F$  متناهی تولید شده و روی  $K$  جبری است.  
ج.  $F = K(S)$  برای زیر مجموعه متناهی  $S$  از  $F$  و هر عنصر  $S$  روی  $K$  جبری است.

۴. فرض کنید  $K < F$  و  $G = Gal_K F$ . اگر  $F$  در  $K$  بسته باشد آنگاه  $F$  روی  $K$  نرمال است.

۵. فرض کنید  $K < C$  و  $K < F < R$  و  $F$  روی  $K$  نرمال باشد و  $[F:K] = 2^n$  که  $n$  عدد طبیعی است. در این صورت  $F < C$  (یک مجموعه اعداد ساخت پذیر و  $R$  مجموعه اعداد حقیقی است).