



مجاز است.

استفاده از:

۱. هرگاه T یک تبدیل خطی بین دو فضای برداری با بعد متناهی باشد کدام یک از گزینه‌های زیر با سه گزینه دیگر معادل نمی‌باشد؟

- الف- T یک به یک باشد
ب- T پوشا باشد.
ج- T دارای کرنل تک عضوی باشد
د- T مشتق پذیر باشد.

۲. فرض کنید در یک فضای برداری دو نرم A , B معادلند آنگاه:

- الف- $\forall x : \|x\|_A = \|x\|_B$
ب- $\forall x \exists K : \|x\|_A = K \|x\|_B$
ج- $\forall x \exists K : \|x\|_A \leq K \|x\|_B$
د- $\forall x \exists K : \frac{1}{K} \|x\|_B \leq \|x\|_A \leq K \|x\|_B$

۳. کدامیک از عبارات زیر همواره برقرار است؟

الف- هرگاه $f : V^k \rightarrow W$ نگاشتی بین فضاهای برداری باشد و برای هر $h_i \in V, 1 \leq i \leq k, \|h_i\| = 1$ باشد،

$$f(h_1, \dots, h_k) = 0$$

ب- برای هر تبدیل خطی $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x) = x \cdot y$ وجود دارد که

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p = 2\|x\|^p + 2\|y\|^p, \mathbb{R}^n$$

د- در هر فضای نرم دار گوی واحد، کامل است.



مجاز است.

استفاده از:

۴. کدامیک از توابع زیر یک انقباض روی فضای متری X است. هرگاه x, y نقاطی دلخواه از X باشند و

الف- $d(f(x), f(y)) = ۲d(x, y)$ ب- $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

ج- $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ د- $d(f(x), f(y)) = \frac{1}{۲}d(x, y)$

۵. کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف- هرگاه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه‌ای از \mathbb{R} دارای مشتق مخالف صفر باشد، f وارون پذیر است.

ب- هرگاه $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه‌ای از \mathbb{R} دارای مشتق مخالف صفر باشد، f^{-1} مشتق پذیر است.

ج- هرگاه $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در هر نقطه‌ای از \mathbb{R}^n دارای مشتق و در عین حال مشتق آن وارون پذیر باشد، f یک نگاشت

باز است.

د- هرگاه $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در هر نقطه‌ای از \mathbb{R}^n مشتق پذیر باشد، f به طور موضعی یک به یک است.

۶. هرگاه P, P' دو افرازی بر I باشند به طوری که $P' \subset P$ ، $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد،

الف- $U(P', f) \leq U(P, f)$ ب- $L(P, f) \leq L(P', f)$

ج- $U(P, f) \leq U(P', f)$ د- $U(P', f) \leq L(P, f)$

۷. کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف- مجموعه دوایری به شعاع $\sqrt{۲}$ و مرکز دو عدد گویا در $\mathbb{R}^۲$ دارای اندازه صفر است.

ب- مجموعه دوایری به شعاع ۲ و مرکزی به مختصات دو عدد گنگ دارای اندازه صفر است.

ج- مجموعه دوایری به شعاع ۲ و مرکزی به مختصات یک عدد گویا و یک عدد گنگ دارای اندازه صفر نیست.

د- مجموعه کانتور دارای اندازه صفر است.



مجاز است.

استفاده از:

۸. کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف - $[۱,۲] \times [۲,۳] \times [۳,۴]$ دارای قدر صفر نمی باشد.

ب- هر مجموعه با قدر صفر دارای اندازه صفر است.

ج- مجموعه‌ای وجود دارد که دارای قدر صفر می باشد ولی اندازه صفر ندارد.

د- مجموعه‌ای وجود دارد که دارای اندازه صفر می باشد ولی قدر صفر ندارد.

۹. کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف - $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در $a \in A$ پیوسته است اگر فقط اگر $o(f, a) = 0$

ب- هرگاه $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ کران دار و A بسته باشد، برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه $\{x \in A : o(f, x) \geq \epsilon\}$

بسته است.

ج- هرگاه A فشرده و با اندازه صفر باشد آنگاه A با قدر صفر است.

د- هرگاه A فشرده و با قدر صفر باشد آنگاه A با اندازه صفر است.

۱۰. هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ باشد، نگاشت دترمینان

الف- یک فرم روی A است.

ب- یک n - تانسور ناهمگرد روی A است.

ج- یک n - تانسور همگرد روی A است.

د- یک n^2 - تانسور همگرد روی A است.



مجاز است.

استفاده از:

۱۱. در خصوص ضرب تانسوری کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف- $(S_1 + S_p) \otimes S_m = S_1 \otimes S_m + S_p \otimes S_m$

ب- $(S_1 \otimes S_p) \otimes S_m = S_1 \otimes (S_m \otimes S_p)$

ج- $S_1 \otimes (S_p + S_m) = (S_1 \otimes S_p) + (S_1 \otimes S_m)$

د- $(aS_1) \otimes S_p = S_1 \otimes (aS_p)$

۱۲. اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه‌ای برای V^* باشد:

ب- $\dim T^r(V^*) = n^r$

الف- $\dim T^r(V^*) = n$

د- $\dim T^r(V^*) = n^r$

ج- $\dim T^r(V^*) = r$

۱۳. کدامیک از عبارات زیر نادرست است؟

الف- هرگاه $v_1, \dots, v_p \in V$ ، به ازای هر $T \in \Lambda^p(V^*)$ ، $T(v_1, \dots, v_p) = 0$

ب- هرگاه $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$ ، آنگاه $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k = 0$

ج- هرگاه $\dim V = K$ ، $v_1, \dots, v_k \in V$ ، $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \det[\phi_i(v_j)]$$

د- هرگاه $S, T \in \Lambda^p(V^*)$ ، آنگاه $T \wedge S = (-1)^p S \wedge T$



مجاز است.

استفاده از:

۱۴. کدام عبارت نادرست است؟

الف- اگر A^t ماتریس ترانهاده A باشد $\det A = \det A^t$

ب- اگر A متعامد باشد، $AA^t = I$

ج- اگر $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ پایه‌ای برای V^* باشد، $\phi_I \wedge \phi_J = \phi_J \wedge \phi_I$ که $\phi_I = \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_p}$

د- اگر A متعامد باشد، $\det A = \pm 1$

۱۵. کدام عبارت نادرست است؟

الف- نگاشتهای مستوی مجموعه‌های محدب را به مجموعه‌های محدب می‌نگارند.

ب- Q^k کوچکترین زیر مجموعه محدب R^k است.

ج- هرگاه ψ یک زنجیر باشد، $\partial^2 \psi = 0$

د- هرگاه σ یک سادک سه راسی باشد، $\partial \sigma$ شامل سه وجه خواهد بود.

۱۶. فرض کنید $f: R^m \rightarrow R^n$ نگاشتی باشد،

الف- اگر f تابع خطی باشد مشتق f برابر خود f است.

ب- اگر f تابع خطی باشد مشتق f در هر نقطه برابر صفر است.

ج- اگر f تابعی ثابت باشد و مشتق آن در هر نقطه برابر خود f است.

د- اگر f تابع خطی و غیر ثابت باشد مشتق آن در هر نقطه برابر صفر است.

۱۷. قدر خم طولپذیر γ با طول λ برابر است با:

الف- λ ب- صفر ج- $k\lambda$ د- $\sqrt{\lambda}$



مجاز است.

استفاده از:

۱۸. تحت چه شرایطی فرم w را کامل می نامند؟

الف - $dw = 0$ ب - f ای باشد که $w = df$

ج - f ای باشد که $f = dw$ د - $\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$

۱۹. کدام عبارت در خصوص ضرب گوه‌ای نادرست است؟

الف - $w \wedge \eta = \eta \wedge w$ ب - $f w \wedge \eta = f(w \wedge \eta)$

ج - $\theta \wedge (w \wedge \eta) = (\theta \wedge w) \wedge \eta$ د - $(w_1 + w_2) \wedge \eta = w_1 \wedge \eta + w_2 \wedge \eta$

۲۰. کدام عبارت نادرست است؟

الف - هر مجموعه با قدر صفر، اندازه صفر دارد.

ب - هر مجموعه با اندازه صفر، دارای قدر صفر است.

ج - هر مجموعه با اندازه صفر و فشرده، دارای قدر صفر است.

د - هر مجموعه با قدر صفر و فشرده، دارای اندازه صفر است.



مجاز است.

استفاده از:

سوالات تشریحی

بارم هر سوال ۲ نمره

۱. فرض کنید $f : R^3 \rightarrow R^2$ ، $f(x, y, z) = (yz, xy)$ ، $x = a \cos t$ ، $y = b \sin t$ ، $z = ct$ ، $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

انتگرال $\int_{\gamma} f$ را که γ قطعه خط واصل بین $0, \frac{\pi}{2}$ است را بدست آورید.

۲. هرگاه $f : D \rightarrow R^m$ نگاشتی مشتق پذیر و $D \subset R^n$ باشد برای هر

$$((D^p f(a))(h))(t) = ((D^p f(a))(t))(h), \quad t, h \in R^n$$

۳. ثابت کنید در هر فضای متریک کامل هر نگاشت انقباضی دارای نقطه ثابت منحصر بفردی می باشد.

۴. مستقیماً ثابت کنید هر اجتماع شما را از مجموعه های با اندازه صفر، دارای اندازه صفر است.

۵. اگر ω یک فرم k بعدی در مجموعه باز $E \subset R^n$ ، ϕ یک سطح k -بعدی در E با قلمرو پارامتری $D \subset R^k$ ، Δ سطح

k -بعدی در R^k با قلمرو پارامتری D باشد که توسط $\Delta(u) = u$ تعریف شود، در این صورت $\int_{\phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{\phi}$