

۱- عمل دوتایی \* روی  $Z$  را به صورت  $a * b = 2(a+b)$  در نظر بگیرید. گزینه درست کدام است؟

۱. عمل دوتایی \* جابجایی نیست.  
۲. عمل دوتایی \* شرکت پذیر است.  
۳. عمل دوتایی \* شرکت پذیر نیست اما جابجایی است.  
۴. عمل دوتایی \* شرکت پذیر است اما جابجایی نیست.

۲- عمل دوتایی \* روی مجموعه  $R - \{1\}$  را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\forall x, y \in R - \{1\} \quad x * y = x + y - xy$$

کدام گزینه در مورد  $R - \{1\}$  همراه با عمل \* درست نیست؟

۱.  $(R - \{1\}, *)$  یک گروه است.  
۲.  $e = 0$  عضو همانی  $R - \{1\}$  همراه با \* است.  
۳. \* روی  $R - \{1\}$  یک عمل دوتایی شرکت پذیر نیست.  
۴.  $x' = \frac{x}{x-1}$  معکوس هر عضو مانند  $x$  است.

۳- گروه  $G$  با عضو همانی  $e$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $o(x) = n, x \in G$  باشد. کدام گزینه در مورد گروه  $G$  برقرار نیست؟

۱. اگر  $x^m = e$  باشد آنگاه  $n$  عدد  $m$  را تقسیم می کند.  
۲. اگر  $(m, n) = 1$  آنگاه  $o(x^m) = n$ .  
۳. اگر  $x^m = e$  باشد آنگاه  $n \leq m$ .  
۴. مرتبه هر توانی از  $x$ ، نیز برابر با  $n$  است.

۴- رتبه عنصر  $\bar{5}$  در گروه  $(Z_{10}, \oplus)$  کدام است؟

۱. ۲۰  
۲. ۵  
۳. ۱  
۴. ۴

۵- مرکز گروه  $GL(2, R)$  کدام است؟

۱.  $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \neq 0 \right\}$   
۲.  $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \neq 0 \right\}$   
۳.  $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a \in R \right\}$   
۴.  $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in R \right\}$

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: جبر ۱، مبانی جبر

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، آموزش ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (PNUN News Agency)  
-، ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۵

۶- فرض کنید  $m$  عدد صحیح و مثبت باشد. کدام گزینه در مورد گروه دوری  $G = \langle x \rangle$  از مرتبه  $n$  در حالت کلی برقرار نیست؟

۱. اگر  $m \mid n$  آنگاه  $G$  دارای زیر گروهی از مرتبه  $m$  است.
۲. اگر  $m \mid n$  آنگاه  $G$  دارای زیر گروه منحصر بفرد از مرتبه  $m$  است.
۳.  $\langle x^{\frac{n}{m}} \rangle$  گروهی از مرتبه  $m$  است.
۴. اگر  $G$  دارای زیر گروهی از مرتبه  $m$  باشد آنگاه  $m \mid n$ .

۷- کدام گزینه در مورد گروه  $Z_p \times Z_p$  درست نیست؟

۱.  $Z_p \times Z_p$  گروهی آبلی است.
۲.  $Z_p \times Z_p$  گروهی دوری است.
۳.  $Z_p \times Z_p$  با گروه  $Z_p$  یکرخت نیست.
۴.  $Z_p \times Z_p$  با گروه  $K_p$  یکرخت است.

۸- رتبه عضو  $(\bar{2}, \bar{3}, \bar{2})$  در گروه  $Z_6 \times Z_9 \times Z_{10}$  کدام است؟

۱. ۶۰
۲. ۳۰
۳. ۱
۴. ۷۲۰

۹- جایگشت  $f = (1\ 3\ 4)(2\ 5)$  را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه های زیر نمایش  $f$  به صورت حاصل ضرب ترانهش ها است؟

۱.  $f = (1\ 3)(1\ 4)(2\ 5)$
۲.  $f = (1\ 3)(1\ 4)(2\ 5)(2\ 3)(2\ 3)$
۳.  $f = (1\ 4)(1\ 3)(2\ 5)$
۴.  $f = (2\ 5)$

۱۰- شاخص زیر گروه  $5Z$  در گروه  $Z$  کدام است؟

۱. ۵
۲. ۲
۳. ۱
۴. این شاخص نامتناهی است.

۱۱- گروه  $G$  و زیر گروه  $H$  از آن را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

۱. اگر  $[G : H] = 2$  آنگاه  $H \triangleleft G$ .
۲. اگر  $H \triangleleft G$  آنگاه  $[G : H] = 2$ .
۳. شرط لازم و کافی برای نرمال بودن  $H$  این است که  $[G : H] = 2$ .
۴. اگر  $H$  آبلی باشد، آنگاه  $H \triangleleft G$ .

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: جبر، مبانی جبر

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، آموزش ریاضی، ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (جبر)، ریاضی محض (PNUN News Agency)  
- ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۳۲۵

۱۲- فرض کنید  $G = Q_8$  و  $H = \{I, -I\}$  باشد. آنگاه  $\frac{G}{H}$  با کدام یک از گروه های زیر یکرخت است؟

۱.  $Z_8$       ۲.  $k_4$       ۳.  $Q_8$       ۴.  $H$

۱۳- گروه آبدی  $G$  از مرتبه ۱۵ و عدد اول  $p = 5$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

۱.  $G$  دارای زیرگروهی از مرتبه ۲ است.      ۲.  $G$  تنها دارای دو زیرگروه بدیهی است.  
۳.  $G$  دارای زیرگروهی از مرتبه ۵ است.      ۴.  $G$  زیرگروه غیر بدیهی ندارد.

۱۴- فرض کنید  $\phi: GL(2, R) \rightarrow (R - \{0\}, \cdot)$  به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

آنگاه  $\phi$  کدام گزینه درست است؟

۱.  $\phi$  یک برورختی است.      ۲.  $\phi$  یک تکریختی است.  
۳.  $\phi$  یک یکرختی است.      ۴.  $\phi$  یک همسانی است که نه یک به یک است و نه پوشا.

۱۵- فرض کنید  $G$  و  $H$  دو گروه و  $\phi: G \rightarrow H$  یک همسانی و  $x \in G$  و  $o(x) = n$  باشد. کدام گزینه در مورد  $o(\phi(x))$  درست است؟

۱.  $o(\phi(x)) = 1$       ۲.  $o(\phi(x)) \mid n$   
۳.  $o(\phi(x)) = n$       ۴. در مورد مرتبه  $o(\phi(x))$  نمی توان نظری داد.

۱۶- همریختی  $\phi: GL(2, R) \rightarrow (R - \{0\}, \cdot)$  را با ضابطه  $\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$  در نظر بگیرید. هسته  $\phi$  کدام است؟

۱.  $GL(2, R)$       ۲.  $GL(2, R) \setminus \{0\}$       ۳.  $SL(2, R)$       ۴.  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

۱۷- عنصر  $a$  در حلقه  $(Z_n, \oplus, \odot)$  را در نظر بگیرید.  $a$  یکه است اگر و فقط اگر

۱.  $a$  مقسوم علیه صفر باشد.      ۲.  $(a, n) = 1$   
۳.  $a$  پوچتوان باشد.      ۴.  $a$  عضو همانی باشد.

۱۸- کدام یک از حلقه های زیر یک حوزه صحیح نیست؟

۱.  $Z$       ۲.  $Z_7$       ۳.  $Z_3$       ۴.  $Z_6$

۱۹- قلمرو صحیح  $R$  با عنصر یکه  $1$  و ایده آل اول  $I$  از  $R$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۱. حلقه  $\frac{R}{I}$  تعویض پذیر است.      ۲.  $1+I$  عنصر یکه حلقه  $\frac{R}{I}$  است.

۳.  $\frac{R}{I}$  یک قلمرو صحیح است.      ۴.  $\frac{R}{I}$  یک میدان است.

۲۰- فرض کنید  $J, I$  ایده آلهایی از حلقه  $R$  به گونه ای باشند که  $J+I=R$  و  $J \cap I = \{0\}$ . کدام گزینه درست است؟

۱.  $R \cong J+I$       ۲.  $R \cong I$       ۳.  $R \cong J$       ۴.  $R = 0$

### سوالات تشریحی

۱- فرض کنید  $G = \langle x \rangle$  گروهی دوری از مرتبه  $n$  باشد. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت  $m$ ، گروه  $G$  دارای زیر گروهی از مرتبه  $m$  است اگر و تنها اگر  $m$  عدد  $n$  را تقسیم کند. ۱.۴۰ نمره

۲- الف) ضرب زیر را در  $S_{10}$  بدست آورید. ۱.۴۰ نمره

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 3 & 5 & 4 & 7 & 1 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

ب) حاصلضرب بالا را صورت حاصلضرب دورهایی از هم جدا بدست آورید. سپس آن را به صورت حاصلضربی از ترانهش ها بنویسید و زوج و فرد بودن آن را مشخص کنید.

۳- ثابت کنید رتبه هر عضو از یک گروه متناهی  $G$ ، مرتبه  $G$  را عاد می کند. ۱.۴۰ نمره

۴- نشان دهید که در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه هر ایده آل ماکزیمال یک ایده آل اول است. ۱.۴۰ نمره

۵- نشان دهید در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه چون  $R$ ، ایده آل  $I$  اول است اگر و تنها اگر  $\frac{R}{I}$  یک حوزه صحیح باشد. ۱.۴۰ نمره