

۱- اگر انتگرالپذیری ریمان - اشتیلتیس تابع f روی $[a, b]$ را داشته باشیم، آنگاه f دارای کدام خاصیت می باشد؟

۱. پیوستگی f ۲. یکنوایی f ۳. اکیداً یکنوایی f ۴. کراننداری f

۲- با ظریفتر شدن افرازشای $[a, b]$ مجموع های بالایی و پایینی f به ترتیب چه رفتاری دارند؟

۱. کاهش - کاهش ۲. افزایش - کاهش ۳. کاهش - افزایش ۴. افزایش - افزایش

۳- کدام یک از گزینه های زیر معادل بقیه گزینه ها نیست؟

۱. $f \in R(\alpha)$

۲. $\sup L(p, f, \alpha) = \inf U(p, f, \alpha)$

۳. $\int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha$

۴. $\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \forall p (P_\varepsilon \subseteq p \rightarrow U(p, f, \alpha) - L(p, f, \alpha) < \varepsilon)$

۴- کدام یک از توابع زیر در بازه $[0, 1]$ انتگرالپذیر به معنی ریمان است؟

۱. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ -1 & x \notin Q \end{cases}$

۲. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin Q \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \end{cases}$

۴. $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ -x & x \notin Q \end{cases}$

۳. $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \notin Q \\ 0 & x \in Q \end{cases}$

۵- در قضیه تعمیم مقدار میانگین برای انتگرالها چه شرط کافی متضمن وجود عدد λ بطوریکه $m \leq \lambda \leq M$ و

$\int_a^b f d\alpha = \lambda(\alpha(b) - \alpha(a))$
می باشد؟

۲. فشردگی بازه $[m, M]$

۱. شرط $f \in R(\alpha)$

۴. شرط کراننداری f

۳. همبندی بازه $[m, M]$

۶- فرض کنید $f \in R$ بر $[a, b]$ و α تابعی صعودی و پیوسته بر این بازه باشد. هر گاه بر $[a, b]$,

$$F(x) = \int_a^x f d\alpha$$

، آنگاه بر این بازه

۱. F تابعی یکنوا است.

۲. F تابعی پیوسته است.

۳. F تابعی با تغییر کراندار است.

۴. در مورد F حکمی نمی توان داد.

۷- فرض کنید دنباله ای متناهی از اعضای $[a, b]$ باشد آنگاه تابعی مانند f موجود است بطوریکه

$$\int_1^n f(x) d[x] = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

$$\int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

$$\int_0^n f(x) d[x] = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

$$\int_0^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$$

۸- مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$ کدام است؟

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$$

۹- اگر $f, g \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ ، آنگاه بر این بازه کدام گزینه صحیح است؟

۱. $fog \in R(\alpha)$ ۲. $fg \in R(\alpha)$ ۳. $[f] \in R(\alpha)$ ۴. $[f^p] \in R(\alpha)$

۱۰- با فرض اینکه تابع $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow R$ و برای هر $y \in [c, d]$ $F(y) = \int_a^b f(x, y) d\alpha(x)$ موجود باشد چه شرطی

کافی است که F' بر $[c, d]$ موجود باشد؟

۱. f پیوسته باشد. ۲. $D_1 f$ موجود باشد. ۳. $D_2 f$ پیوسته باشد. ۴. $D_2 f$ موجود باشد.

۱۱- تابع f بر $[a, b]$ دارای مشتق پیوسته است به طوری که $f(a) = f(b) = 0$ و $\int_a^b f^2(x) dx = 1$. در این

صورت مقدار $\int_a^b x f(x) f'(x) dx$ برابر است با

۰.۲ $-\frac{1}{2}$

۰.۱ $\frac{1}{2}$

۰.۴ $\frac{1}{2}(f^2(a) - f^2(b))$

۰.۳ صفر

۱۲- کدام یک از انتگرالهای زیر بطور مطلق همگراست؟

۰.۴ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

۰.۳ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

۰.۲ $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx$

۰.۱ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx$

۱۳- خم f بر $[a, b]$ طولپذیر است اگر بر این بازه

۰.۲ f' موجود باشد.

۰.۱ f پیوسته باشد.

۰.۴ f با تغییر کراندار باشد.

۰.۳ f' پیوسته باشد.

۱۴- کدام یک از خواص زیر برای با تغییر کراندار بودن تابع پیوسته f بر بازه $[a, b]$ کافی نیست؟

۰.۲ f دارای مشتق کراندار باشد.

۰.۱ f یک چند جمله ای باشد.

۰.۴ f یکنوا باشد.

۰.۳ f پیوسته باشد.

۱۵- کدام یک از گزاره های زیر همواره درست نیست؟

۰.۱ حد یکنواخت دنباله ای از توابع پیوسته، پیوسته است.

۰.۲ حد یکنواخت دنباله ای از توابع کراندار، کراندار است.

۰.۳ حد یکنواخت دنباله ای از توابع مشتق پذیر، مشتق پذیر است.

۰.۴ حد یکنواخت دنباله ای از توابع انتگرال پذیر، انتگرال پذیر است.

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی (کاربردی) (آنالیز عددی)، ریاضی (محض) (آنالیز ریاضی) محض (آنالیز ریاضی) محض
(هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) (۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۰۸۸)

۱۶- کدام سری بر مجموعه اعداد حقیقی به طور یکنواخت همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} \quad .۴ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad .۳ \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + \frac{1}{n}} \quad .۲ \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) \quad .۱$$

۱۷- اگر X یک فضای متریک فشرده و F زیر فضای بسته از $C(X)$ باشد آنگاه F فشرده است اگر و فقط اگر

۱. F کراندار و همبسته باشد.
۲. F کراندار و هر دنباله در آن همگرا باشد.
۳. F چگال و همبسته باشد.
۴. F همبسته و هر دنباله در آن همگرا باشد.

۱۸- کدام یک از شروط زیر در همگرایی یکنواخت سری $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$ بکمک آزمون آبل کاربرد ندارد؟

۱. سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ به طور یکنواخت همگراست.
۲. دنباله $\{g_n\}$ به طور یکنواخت کراندار است.
۳. دنباله $\{g_n\}$ صعودی است.
۴. $g_n \Rightarrow 0$

۱۹- جبر A نقاط E را جدا میکند یعنی چه؟

۱. به ازای هر $x \in E$ توابعی مانند f و g در A موجود است بطوریکه $f(x) \neq g(x)$
۲. به ازای هر $x, y \in E$ تابعی مانند f در A موجود است بطوریکه $f(x) \neq f(y)$
۳. به ازای هر $x, y \in E$ تابعی مانند f و g در A موجود است بطوریکه $f(x) \neq g(y)$
۴. به ازای هر $x, y \in E$ و هر تابع f در A ، داریم $f(x) \neq f(y)$

۲۰- با توجه به تعاریف $C(x) = \frac{E(ix) + E(-ix)}{2}$ و $S(x) = \frac{E(ix) - E(-ix)}{2i}$ کدام مقدار زیر درست است؟

۱. $C(0) = 1$
۲. $C(\pi) = 1$
۳. $S(0) = 1$
۴. $S(\pi) = 1$

سوالات تشریحی

نمره ۱.۴۰

۱- ثابت کنید اگر تابع های f و α در نقطه x_0 از بازه $[a, b]$ از راست نا پیوسته باشند، آنگاه $f \notin R(\alpha)$

نمره ۱.۴۰

۲- فرض کنید $a < c < b$ و f در c پیوسته باشد و $\alpha(x) = I(x-c)$. آنگاه $f \in R(\alpha)$ بر $[a, b]$ و

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)$$

نمره ۱.۴۰

۳- نشان دهید هر چند جمله ای بریک بازه $[a, b]$ یک تابع با تغییر کراندار است. روش پیدا کردن تغییرات کل آن را بیابید.

نمره ۱.۴۰

۴- فرض کنید $\{M_n\}$ دنباله ای از اعداد نامنفی باشد به طوریکه $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگراست و $\{f_n\}$ دنباله ای از تابع ها باشد که به ازای هر x, n داریم $|f_n(x)| \leq M_n$. در اینصورت ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ به طور یکنواخت همگراست.

نمره ۱.۴۰

۵- اگر X یک فضای متریک فشرده باشد، $f_n \in C(X)$ و $f_n \Rightarrow f$ ، آنگاه ثابت کنید $\{f_n\}$ هم پیوسته است.