

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع $P(X = x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^k, k = 1, 2, 3, \dots$ و با تابع مولد احتمال $\phi(s)$ باشد مقدار

(۱) ϕ'' کدامست؟

۵ .۴

۹ .۳

۸ .۲

۸ .۱
۹

۲- اگر x یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x) = 5e^{-5x}, x > 0$ و $y | X = x$ دارای توزیع پواسن با پارامتر $3x$

باشد $E(Y^2)$ چیست؟

۱۲ .۴

۳۳ .۳
۲۵

۲۰ .۲
۲۵

۲۴ .۱
۲۵

۳- تاس سالمی را متوالیا پرتاب می کنیم تا ۶ بیاید. در صورت مشاهده $k (k = 1, 2, \dots, 5)$ ، k دقیقه صبر می کنیم و سپس دوباره تاس را پرتاب می کنیم. اگر T مدت زمان انتظار تا آمدن ۶ باشد. $E(T)$ چیست؟

۱۵ .۴

۱۶ .۳

۱۲ .۲

۱۰ .۱

۴- اگر X_1 دارای توزیع نمایی با پارامتر θ و X_2, \dots, X_n دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{\theta}{2}$ باشند. با فرض مستقل بودن

X_1, \dots, X_n چقدر احتمال دارد که X_1 کوچکترین مشاهده باشد؟

۲ .۴
 $\frac{2}{n+1}$

۳ .۳
 $\frac{\theta}{n+1}$

۲ .۲
 $\frac{\theta}{n}$

۱ .۱
 $(n+2)\theta$

۵- اگر X_1 دارای توزیع یکنواخت بر $(0,1)$ و $X_2 | X_1 = x_1$ دارای توزیع یکنواخت بر $(x_1, 0)$ و به همین ترتیب $X_{n+1} | X_n = x_n$ دارای توزیع یکنواخت بر $(x_n, 0)$ باشند مقدار $Var(X_n)$ چیست؟

۸۷ .۴

۳۴ .۳

۱۷۵ .۲
 $\frac{175}{20736}$

۱۷۵ .۱
 $\frac{175}{207}$

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، باغیات و کاربردها) PNU News Agency

۶- اگر $N(t)$ دارای توزیع پواسن با پارامتر λ و $N(a, b) = N(b) - N(a)$ باشد،
 $P(N(2, 3) = 6 | N(0, 4) = 10)$ کدام است؟

$$1. \quad P(N(1) = 6, N(3) = 4 | N(4) = 10) = \frac{P(N(1) = 6, N(3) = 4)}{P(N(4) = 10)}$$

$$2. \quad \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$3. \quad \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$4. \quad \binom{10}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

۷- عددی در فاصله $(0, 1)$ انتخاب می‌کنیم و آن را X می‌نامیم. اگر $X = X$ باشد سکه ای که احتمال شیر آمدنش X است را n بار پرتاب می‌کنیم. توزیع تعداد شیرها چیست؟

۱. یکنواخت پیوسته ۲. هندسی ۳. پواسن ۴. یکنواخت گسسته

۸- در سوال شماره ۷ با فرض $n = 5$ واریانس تعداد شیرها چیست؟

۱. $\frac{195}{4}$ ۲. $\frac{35}{12}$ ۳. $\frac{2}{5}$ ۴. $\frac{1}{4}$

۹- اگر A_1, A_2, \dots یک دنباله از پیشامدهای نزولی و $P(A_k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{k}{n}\right)}$ باشند، مقدار $P(\cup A_i)$ چیست؟

۱. $1 - \frac{2}{e}$ ۲. $\frac{1}{e}$ ۳. ۱ ۴. صفر

۱۰- اگر X یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نامنفی باشد طوریکه

$$P(X > k + 1 | X > k) = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2, k = 0, 1, 2, \dots$$

آنگاه $E(X)$ چیست؟

۴. $\frac{\pi^2}{6}$

۳. $\frac{\pi}{6}$

۲. $\frac{\pi^2}{3}$

۱. $\frac{\pi}{3}$

۱۱-

اگر X یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نامنفی و $P(X > k + 1 | X > k) = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2$ باشد $E(X)$ چیست؟

۴. $\frac{\pi}{6}$

۳. $\frac{\pi}{3}$

۲. $\frac{\pi^2}{3}$

۱. $\frac{\pi^2}{6}$

۱۲- توزیع ایستا در یک زنجیر زاد و مرگ با فرض $p_x = p > 0, q_x = q > 0$ چه نام دارد؟

۴. توزیع کای اسکور

۳. توزیع نرمال

۲. توزیع پواسون

۱. توزیع هندسی

۱۳- در زنجیر ارنفست ساده با ۵ مهره اگر X دارای توزیع یکنواخت گسسته بفضای حالت باشد آنگاه $E(X)$ چیست؟

۴. ۳۷

۳. ۲۴

۲. ۱۲

۱. ۲/۵

۱۴-

اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف با فضای حالت $\{0, 1\}$ و ماتریس احتمال انتقال

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

باشد با فرض $\pi_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ مطلوبست $P(X_{10} = 1)$.

۴. $\frac{4}{7}$

۳. $\frac{4}{7} + \left(\frac{5}{12}\right)^{10}$

۲. $\frac{4}{7} - \left(\frac{5}{12}\right)^{10}$

۱. $\frac{4}{7} - \frac{1}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^{10}$

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها)

۱۵- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده اگر $p = \frac{1}{2}$ باشد آن گاه:

- ۰۱ زنجیر تحویل ناپذیر بازگشتی است
۰۲ زنجیر تحویل ناپذیر بازگشتی پوچ است
۰۳ زنجیر تحویل ناپذیر گذرا است
۰۴ موارد ۱ و ۲

۱۶- در سوال شماره ۱۴ با فرض $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ مقدار $E_0(T_0)$ چیست؟

- ۰۱ $\frac{17}{9}$
۰۲ ۱۷
۰۳ ۱
۰۴ ۱۲

۱۷- اگر X و Y حالتی از یک زنجیر مارکف $\{X_n, n \geq 0\}$ و $P_{xy}^{(n)} = \frac{1}{4(n-1)!}$ باشند. مقدار $E_x(N(y))$ برابر است با:

- ۰۱ e
۰۲ $\frac{e}{4}$
۰۳ $\frac{1}{25}$
۰۴ $\frac{1}{25}$

۱۸- اگر Y حالتی گذرا باشد آن گاه کدام مورد زیر درست است؟

- ۰۱ $P(N(Y) = \infty) = 1$
۰۲ $E_x(N(Y)) = \frac{f_{xy}}{1-f_{yy}}$
۰۳ $E_x(N(Y)) = \infty$
۰۴ موارد ۱ و ۲

۱۹- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف همگن و Y حالت گذرا باشند. $f_{yy} = \frac{12}{25}$ ، $f_{xy}^{(n)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ، $n \geq 1$ اگر فرآیند از حالت X شروع به فعالیت نموده باشد متوسط تعداد دفعات برخورد به حالت Y چیست؟

- ۰۱ ۱۵
۰۲ $\frac{12}{25}$
۰۳ نامشخص
۰۴ $\frac{100}{127}$

۲۰- گزاره صحیح کدام است؟

۱. اگر $y \rightarrow x$ باشد آنگاه هر دو حالت X و Y یا گذریند و یا بازگشتی
۲. تمام حالت‌های یک زنجیر مارکف با فضای حالت‌های متناهی بازگشتی است
۳. رابطه در دسترس بودن یک رابطه هم ارزی است
۴. هر سه مورد

۲۱- گزاره صحیح کدام است؟

۱. هر زنجیر مارکف با فضای حالت متناهی فقط یک حالت بازگشتی دارد
۲. شرط لازم و کافی برای آنکه حالت صفر در زنجیر قدم زدن تصادفی بازگشتی باشد آن است که $p = \frac{1}{3}$
۳. اگر دو حالت در دسترس همدیگر باشند آن گاه هر دو از یک جنسند.
۴. هر سه مورد

۲۲- در مسئله ورشکستگی قمارباز با سرمایه مجموع ۵ حالت‌های گذرای زنجیر چیست؟

۱. $\{1, 2\}$
۲. $\{0, 5\}$
۳. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
۴. $\{1, 2, 3, 4\}$

۲۳- در مسئله ورشکستگی قمارباز با $a = 2, b = 3$ و $p = \frac{1}{4}$ احتمال ورشکستگی شخص A چقدر است؟

۱. $0/12$
۲. $0/54$
۳. $\frac{1}{10}$
۴. $\frac{90}{91}$

۲۴-

۱	۱	۰	۱
۴	۴		۲
۱	۰	۰	۲
۳			۳
۰	۰	۱	۱
۰	۰	۲	۲
		۱	۳
		۳	۳

اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف با فضای حالت $\{0, 1, 2, 3\}$ و ماتریس احتمال انتقال

باشد $E_0(N(1))$ چیست؟

۱.۳ $\frac{14}{5}$

۲. $\frac{1}{5}$

۳. $\frac{3}{5}$

۲۵- در سوال شماره ۲۳ اگر A بهتر از B بازی کند و $p = \frac{3}{5}$ باشد $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_a$ چیست؟ (احتمال

ورشکستگی شخص A است)

۱.۳

۲. $\frac{5}{9}$

۳. $\frac{4}{9}$

۲۶- اگر تعداد نوزادان هر فرد ξ در فرآیند شاخه ای دارای توزیع $p(\xi = k) = v^k \binom{k+1}{8}, k = 0, 1, 2, \dots$ باشد احتمال

انقراض نسل چیست؟

۴. نمی توان حساب کرد

۳. $\frac{1}{7}$

۲. $\frac{1}{8}$

۱. حتمی است

۲۷- کدام مورد درباره زنجیر زاد و مرگ با $p_0 = 1, x > 0, p_x = 0, r_x = 1 - p, q_x = p, p_x$ درست است؟

۱. همواره تحویل ناپذیر گذرا است

۲. همواره تحویل ناپذیر بازمگشتی است

۳. با شرط $q \geq p$ تحویل ناپذیر بازمگشتی است

۴. با شرط $q \geq p$ تحویل ناپذیر گذرا است

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها)

۲۸- در سوال شماره ۲۷، اگر $p = \frac{1}{4}$ باشد واریانس توزیع مانای آن برابر است با:

۱.۴ $\frac{1}{8}$

۳.۳ $\frac{3}{7}$

۱.۲ $\frac{1}{16}$

۱.۱ $\frac{1}{20}$

۲۹- در زنجیر مارکوف با فضای حالت $\{0, 1\}$ و با $f_{00}^{(2)} = \frac{1}{3}, f_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}$ مقدار $f_{00}^{(k)}$ مقدار $E_0(T_0)$ چیست؟

۱۲.۴ «

۱.۳ $\frac{1}{19}$

۱۷.۲ $\frac{17}{9}$

۱.۱ $\frac{1}{9}$

۳۰- چه نوع زنجیرهایی دارای توزیع مانایند؟

۱- تحویل ناپذیر و گذرا

۲- تحویل ناپذیر و بازگشتی پوچ

۳- تحویل ناپذیر و بازگشتی مثبت

۴- موارد ۲ و ۳

سوالات تشریحی

- ۱- یک جسم رادیواکتیو، ذراتی را با نرخ λ ذره در دقیقه منتشر می کند. اگر N_i تعداد ذرات منتشر شده در فاصله i به طول t دقیقه باشد و هر ذره با احتمال ثابت p ثبت شود توزیع تعداد ذرات ثبت شده را بیابید. ۱۰۰ نمره
- ۲- اگر N متغیری تصادفی با توزیع پواسن با پارامتر λ و X_0, X_1, \dots, X_N دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع هندسی با پارامتر p باشد. بشرط استقلال N از X ها تابع مولد احتمال $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ را یافته سپس به کمک آن میانگین Y را بیابید. ۱۰۰ نمره
- ۳- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده در حالت $p=q$ مقدار $E_0(N(\circ))$ بدست آورید. ۱۰۰ نمره
- ۴- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف باشد بازای هر X و Y از فضای حالتها و هر $n \geq 1$ روابط زیر را ثابت کنید. ۱۰۰ نمره
- ۵- در زنجیر زاد و مرگ با فضای حالت $\{0, 1, 2, \dots\}$ و با احتمالهای تغییر وضعیت $p_{xx+1} = p_x, p_{xx-1} = q_x, p_{xx} = r_x, x > 0$ شرط وجود توزیع مانا را بدست آورید. ۱۰۰ نمره
- ۶- در زنجیرهای مارکف زمان - پیوسته معادله پسر و کولموگوروف را بیان و آن را ثابت کنید. ۱۰۰ نمره
- ۷- در زنجیر مارکف زمان پیوسته با فضای حالت $\{0, 1, 2, \dots\}$ و بازای $x \neq y, x \neq 0$ داشته باشیم. ۱۰۰ نمره
- اولاً: معادله پیشرو کولموگوروف را یافته و با استفاده از آن توزیع مانای آن را بیابید.