

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- عدد شرطی ماتریس A کدام است؟

۱. $\|A\| \|A^{-1}\|$ ۲. $\|A\| + \|A^{-1}\|$ ۳. $\frac{\|A\|}{\|A^{-1}\|}$ ۴. $\frac{\|A^{-1}\|}{\|A\|}$

۲- برای جواب دستگاه $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x - 2y - 2z = -1 \end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱. این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است.

۲. این دستگاه بی نهایت جواب دارد.

۳. این دستگاه جواب ندارد.

۴. دستگاه همگن معادل با این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد است.

۳- در چه صورت روش حذفی گوس بدون محورگیری برای حل دستگاه $AX = b$ یک روش پایدار است؟

۱. A یک ماتریس قطری غالب باشد.

۲. A یک ماتریس معین مثبت باشد.

۳. A یک ماتریس متعامد باشد.

۴. A یک ماتریس سه قطری باشد.

۴- ماتریس $A_{n \times n}$ یک ماتریس سه قطری است هرگاه ...

۱. $a_{ij} = 0 \quad ; \quad |i - j| > 1$ ۲. $a_{ij} = 0 \quad ; \quad |i - j| \geq 1$ که

۳. $a_{ij} = 0 \quad ; \quad |i - j| < 1$ که ۴. $a_{ij} = 0 \quad ; \quad |i - j| \leq 1$ که

۵- اگر $P(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2)^2$ چند جمله ای مشخصه ماتریس A باشد، مقادیر ویژه ماتریس A^3 کدام است؟

۱. $-3, 2, 2$ ۲. $-27, 8, 8$ ۳. $27, 8, 8$ ۴. $-9, 8, 8$

۶- اگر برای ماتریس A داشته باشیم $\|A\|_1 = 3$ و $\|A\|_\infty = 5$ کدام گزینه برای $\rho(A)$ صحیح است؟

۱. $\rho(A) \leq 5$ ۲. $\rho(A) \leq 3$ ۳. $\rho(A) < 5$ ۴. $\rho(A) < 3$

۷- کدام گزینه زیر فضای R^2 است؟

۱. $\{(1,0)\}$

۲. $\{(a_1, a_2), a_1 \neq 0\}$

۳. $\{(0,0)\}$

۴. $\{(0,0), (1,-1)\}$

۸- کدام گزینه صحیح است؟

۱. اگر $A_{n \times n}$ و $B_{n \times n}$ به گونه ای باشند که $AB = 0$ آنگاه $A = 0$ یا $B = 0$.

۲. اگر $A_{n \times n}$ و $B_{n \times n}$ ماتریس های وارون پذیر باشند، $A + B$ نیز وارون پذیر است.

۳. برای دو ماتریس $A_{2 \times 1}$ و $B_{1 \times 2}$ ماتریس $C = AB$ وارون پذیر نمی باشد.

۴. اگر $\det(A) = \det(B)$ باشد آنگاه $A = B$.

۹- فرض کنید A یک ماتریس معین مثبت و سه قطری بوده و B_j ماتریس روش ژاکوبی با $\rho(B_j) = \sqrt{0.5}$ باشد.

بهترین انتخاب ω در روش SOR برای تعیین جواب دستگاه $Ax = b$ کدام است؟

۱. 1.1716

۲. 0.8990

۳. 1.2977

۴. 1

۱۰- فرض کنید V و W فضاهای برداری روی هیات F و V متناهی البعد و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱. $\dim V = \dim \text{ran } T + \dim \ker T$

۲. $\dim V = \dim \text{ran } T$ و بنابراین

۳. T یک تبدیل خطی وارون پذیر است

۴. $\dim W = \dim \text{ran } T + \dim \ker T$

۱۱- فرض کنید V و W فضاهای برداری روی هیات F و $T: V \rightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد. کدام گزینه صحیح است؟

۱. اگر T یک تبدیل خطی وارون پذیر باشد آنگاه V و W یکریخت هستند.

۲. $\ker T$ زیرفضایی از W و $\text{ran } T$ زیرفضایی از V است.

۳. T یک تبدیل خطی پوشا است اگر و تنها اگر T یک تبدیل خطی وارون پذیر باشد.

۴. اگر T یک تبدیل خطی وارون پذیر باشد آنگاه وارون آن خود یک تبدیل خطی است.

۱۲- فرض کنید V فضای برداری با بعد n باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱. اگر W زیر فضایی از V باشد، آنگاه $\dim W < \dim V$.
۲. همه پایه های فضای برداری V دارای n عضو هستند.
۳. هر زیر مجموعه مستقل خطی از فضای برداری V این فضا را تولید می کند.
۴. هر زیر مجموعه از فضای برداری V جزیی از یک پایه برای این فضا را تولید می کند.

۱۳- اگر P ماتریس روش هاوس هلدر باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱. P یک ماتریس سه قطری است.
۲. P یک ماتریس متعامد است.
۳. P یک ماتریس بالا هسنبرگی است.
۴. P یک ماتریس نرمال است.

۱۴- برای تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تعریف شده به صورت $T(x, y, z) = (x - y, y + z, x + z)$ $\dim \ker T$ کدام است؟

۱. 0
۲. 1
۳. 2
۴. 3

۱۵- تصویر بردار $\alpha = (-1, 2, 3)$ بر بردار $\beta = (2, 0, -1)$ کدام است؟

۱. $\frac{-5}{14}(2, 0, -1)$
۲. $\frac{-5}{14}(-1, 2, 3)$
۳. $(-2, 0, 1)$
۴. $(1, -2, -3)$

۱۶- در تجزیه دولیتل ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس L کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$
۲. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
۳. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
۴. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

۱۷- فرض کنید $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱. $\|X\|_1 = 0$ ۲. $\|X\|_2 = \sqrt{6}$ ۳. $\|X\|_\infty = 6$ ۴. $\|X\|_1 + \|X\|_\infty = 9$

۱۸- برای روش توانی کدام گزینه صحیح است؟

۱. روش توانی روشی است تکراری برای یافتن بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A از لحاظ قدرمطلق که حقیقی و غیر تکراری باشد.
۲. روش توانی برای یافتن بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A از لحاظ قدرمطلق سریعتر از یافتن بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A^k از لحاظ قدر مطلق است.
۳. روش توانی روشی تکراری برای یافتن بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A از لحاظ قدرمطلق است.
۴. اگر یکی از مقادیر ویژه ماتریس A صفر باشد، روش توانی واگرا خواهد بود.

۱۹- برای حل دستگاه $AX = b$ فرض کنید $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + C$ که $C \neq 0$. کدام گزینه صحیح است؟

۱. به ازای هر بردار اولیه $X^{(0)}$ دنباله $X^{(k)}$ به جواب دستگاه $AX = b$ همگراست اگر و تنها اگر $\|X^{(0)}\| = 0$ باشد.
۲. به ازای هر بردار اولیه $X^{(0)}$ دنباله $X^{(k)}$ به جواب دستگاه $AX = b$ همگراست اگر و تنها B اکیدا قطری غالب باشد.
۳. به ازای هر بردار اولیه $X^{(0)}$ دنباله $X^{(k)}$ به جواب دستگاه $AX = b$ همگراست اگر و تنها $\|B\| < 1$ باشد.
۴. به ازای هر بردار اولیه $X^{(0)}$ دنباله $X^{(k)}$ به جواب دستگاه $AX = b$ همگراست اگر و تنها $\rho(B) < 1$ باشد.

۲۰- برای حل دستگاه $AX = b$ با فرض اینکه $A = L + D + U$ که L یک ماتریس اکیدا پایین مثلثی، D اکیدا قطری و U اکیدا بالا مثلثی می باشند، دنباله حاصل از روش ژاکوبی کدام است؟

۱. $X^{(k)} = D^{-1}(L + U)X^{(k-1)} + D^{-1}b$

۲. $X^{(k)} = -D^{-1}(L + U)X^{(k-1)} + D^{-1}b$

۳. $X^k = -(D + L)^{-1}UX^{(k-1)} + (D + L)^{-1}b$

۴. $X^k = (D + L)^{-1}UX^{(k-1)} + (D + L)^{-1}b$

سوالات تشریحی

۱.۵۰ نمره

۱- فرض کنید V فضای برداری چندجمله ای های حقیقی با درجه کوچکتر یا مساوی ۳ باشد. نشان دهید مجموعه $B = \{x + 1, 2x, x^2 - 1, x^3 + x + 1\}$ یک پایه برای V است. مختصات چندجمله ای $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ را نسبت به این پایه بدست آورید. (روش محاسبه را بنویسید)

۲.۰۰ نمره

۲- دو تکرار از روش گوس-سایدل را برای حل دستگاه زیر با تقریب اولیه $X^{(0)} = (0, 0, 0)$ بدست آورید.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

۱.۵۰ نمره

۳- با استفاده از روش کرایلف چندجمله ای مشخصه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید. $Y^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ انتخاب کنید.

۱.۰۰ نمره

۴- قضیه گرشگورین را بیان کنید.

۱.۰۰ نمره

۵- ماتریسی قطری متشابه با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ بیابید.