تعداد سوالات : تستی : ۲۰ تشریحی : ۵ **زمان آزمون (دقیقه) : تستی : ۶۰ تشریحی : ۶۰** **سری سوال : یک ۱**

عنـــوان درس: مبانی آنالیز ریاضی

رشته تحصیلی/کد درس: آمار و کاربردها، آماررياضی، رياضی محض (آنالیز)، رياضی محض (جبر)، رياضی محض (هندسه)، رياضيات و کاربردها، علوم کامپیوتر۱۱۱۱۳۲۲

۱- کدام گزینه درست است؟

۱. هر میدان مرتب یک میدان ارشمیدسی است.

۲. هر میدان ارشمیدسی یک میدان کامل است.

۳. یک میدان کامل،میدان ارشمیدسی است.

۴. R یک میدان ارشمیدسی است.

۲- کدام گزینه صحیح است؟

۱. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}=1$

۲. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}=0$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{n\pi}{2}=0$

۴. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{n\pi}{2}=-1$

۳- مقدار کدام یک از سریهای زیر با مقدار سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ برابر است؟

۱. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

۲. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

۳. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)^2}$

۴. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$

۴- در فضای متری گسستهٔ N(اعداد طبیعی)، گوی باز به مرکز ۱ و به شعاع ۲ کدام مجموعه است؟

۱. N

۲. $\{1\}$

۳. $\{1,2\}$

۴. $\{1,2,3\}$

۵- اگر M یک فضای متریک کامل و $A\subseteq M$ باشد در این صورت A هیچ جا چگال است هرگاه

۱. $(\overline{A})^{\circ}=\phi$

۲. $\overline{(A^{\circ})}=\phi$

۳. $\overline{A}=M$

۴. $(\overline{A})^{\circ}=M$

۶- اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی فضای متری M دارای یک نقطهٔ انباشتگی باشد آنگاه

۱. M شمارش پذیر است.

۲. M فشرده است.

۳. M همبند است.

۴. M گسسته است.

۷- فرض کنید E زیر مجموعه ای از یک فضای متریک باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱. $\overline{E}=\overline{E^{\circ}}$

۲. $E^{\circ}=\overline{E^{\circ}}$

۳. $(E^{\circ})^c=\overline{E^c}$

۴. $E^c=(E^{\circ})^c$

۸- کدام یک از توابع زیر در تمام نقاط $[0,1]$ دارای حد است و در نقاط اصم این بازه پیوسته است؟

۱. $f(x)=\begin{cases}0 & x\in Q\\ 1 & x\notin Q\end{cases}$

۲. $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in Q\\ \cos x & x\notin Q\end{cases}$

۳. $f(x)=\begin{cases}x & x\notin Q\\ m\sin\dfrac{1}{n} & x=\dfrac{m}{n}\ ((m,n)=1, m,n\in N)\end{cases}$

۴. $f(x)=\begin{cases}x & x\in Q\\ 1-x & x\notin Q\end{cases}$

۹- اگر $f:A\subseteq R\to R$ تابع پیوسته و A نافشرده ولی کراندار باشد آنگاه f روی A

۱. کراندار است ولی پیوستهٔ یکنواخت نیست.

۲. اگر پیوستهٔ یکنواخت باشد کراندار است.

۳. اگر کراندار باشد ماکسیمم دارد.

۴. پیوستهٔ یکنواخت است ولی کراندار نیست.

۱۰- کدام گزینه درست است؟

۱. مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی هر تابع یکنوا، از نوع دوم است.

۲. اگر $f(c^+)$ و $f(c^-)$ موجود نباشند ناپیوستگی تابع f از نوع اول است.

۳. مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی هر تابع یکنوا،متناهی یا شمارش پذیر است.

۴. اگر در تابع یکنوای f، $f(c^-)=f(c^+)$ باشد، f در c پیوسته است.

۱۱- اگر X و Y دو فضای متری باشد تابع $f:X\to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر

۱. برای هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ A در X، $f(A)$ در Y فشرده باشد.

۲. برای هر زیرمجموعهٔ باز A در X، $f(A)$ در Y باز باشد.

۳. برای هر زیرمجموعهٔ $A\subseteq X$، $\overline{f(A)}\subseteq f(\overline{A})$ باشد.

۴. برای هر زیرمجموعهٔ $B\subseteq Y$، $f^{-1}(B^\circ)\subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ باشد.

۱۲- اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد، آنگاه کدام شرط کافی است تا عددی مانند c در (a,b) موجود باشد بطوریکه $f'(c)=0$

۱. $f(a)=f(b)$
۲. $f(a).f(b)<0$
۳. $f(a)<f(b)$
۴. $f(a)>f(b)$

۱۳- اگر n عدد طبیعی زوج و تابع f دارای مشتق مرتبهٔ nام پیوسته بر بازهٔ (a,b) و در نقطه ای مانند $c\in(a,b)$، $f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(n-1)}(c)=0$ و $f^{(n)}(c)<0$ باشد آنگاه

۱. f در c دارای مینیمم موضعی است.
۲. f در c دارای ماکزیمم موضعی است.
۳. c نقطهٔ مینیمم مطلق f است.
۴. c نقطهٔ ماکزیمم مطلق f است.

۱۴- اگر تابع f و α برفاصلهٔ $[0,1]$ با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x & x\in Q\cap[0,1] \\ -x & x\notin Q\cap[0,1]\end{cases}$ و $\alpha(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ باشند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. $\underline{\int_0^1} f(x)dx=\overline{\int_0^1} f(x)dx$
۲. $\overline{\int_0^1} f(x)d\alpha(x)=1$
۳. $f\in R(\alpha)$
۴. $\int_0^1 f(x)d\alpha(x)=\frac{1}{2}$

۱۵- مقدار انتگرال $\int_0^4 (x^2+[x])d([2x])$ کدام گزینه است؟

۱. ۴
۲. ۲۰
۳. $\frac{64}{3}$
۴. موجود نیست.

۱۶- مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$ کدام گزینه است؟

۱. $\log(\sqrt{2}-1)$
۲. $\log(\sqrt{2}+1)$
۳. موجود نیست.
۴. $\log(2+\sqrt{2})$

۱۷- اگر $f\in R(\alpha)$ روی $[a,b]$ باشد، آنگاه در این بازه

۱. f کراندار و α پیوسته است.
۲. f و α هردو پیوسته اند.
۳. f و α نقاط ناپیوستگی چپ (راست)مشترک ندارند.
۴. α صعودی و f پیوسته است.

۱۸- نقیض عبارت $f_n \overset{E}{\Rightarrow} f$ کدام گزینه است؟

۱. $\exists\varepsilon\forall N\exists n\exists x(n\geq N, x\in E, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$

۲. $\exists\varepsilon\forall N\exists n\exists x(n\geq N, x\in E \to |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)$

۳. $\exists\varepsilon\forall N\exists n\exists x(n\geq N, x\in E, |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)$

۴. $\forall\varepsilon\exists N\forall n\forall x(n\geq N, x\in E, |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon)$

۱۹- اگر X یک فضای متریک فشرده و $F\subseteq C(X)$ باشد، آنگاه

۱. اگر F همپیوسته وکراندار باشدفشرده است.

۲. اگر F بسته باشد F بطور یکنواخت کراندار است.

۳. اگر F بسته باشد همپیوسته و کراندار است.

۴. اگر F فشرده باشد همپیوسته و کراندار است.

۲۰- کدام گزینه در مورد دنبالهٔ $f_n(x)=\frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$ بر R نادرست است؟

۱. دنبالهٔ $\{f_n'\}$ بطور یکنواخت همگرا است.

۲. دنبالهٔ $\{f_n'\}$ بطور یکنواخت کراندار است.

۳. دنبالهٔ $\{f_n\}$ بطور یکنواخت همگرا است.

۴. دنبالهٔ $\{f_n\}$ بطور یکنواخت کراندار است.

سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید اگر M یک فضای متریک فشرده باشد آنگاه هر زیرمجموعهٔ نامتناهی E از M حداقل یک نقطهٔ انباشتگی در M دارد. ۱،۴۰ نمره

۲- ثابت کنید اگر X و Y دو فضای متری و $f:X\to Y$ تابع پیوسته و $E\subseteq X$ همبند باشد آنگاه $f(E)$ همبند است. ۱،۴۰ نمره

۳- فرض کنید تابع برداری f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشد ثابت کنید عددی مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد بطوریکه ۱،۴۰ نمره

$$\|f(b)-f(a)\|\leq(b-a)\|f'(c)\|$$

۴- فرض کنید α بر $[a,b]$ صعودی و در نقطهٔ $c\in(a,b)$ پیوسته و $f(x)=\begin{cases}1 & x=c\\ 0 & x\neq c\end{cases}$ باشد نشان دهید $f\in R(\alpha)$ و $\int_a^b f\,d\alpha=0$ ۱،۴۰ نمره

۵- نشان دهید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ بر $[0,\infty)$ به طور یکنواخت همگراست در حالی که به طور مطلق همگرا نیست. ۱،۴۰ نمره