

تعداد سوالات: نستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): نستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

عنوان درس: جبر خطی عددی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضیات و کاربردها، علوم کامپیوتر ۱۱۱۱۳۳۲

استفاده از ماشین حساب ساده، ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- کدامیک از ماتریس های زیر اکیدا قطر غالب است؟

$$\begin{array}{ll}
 \begin{matrix} \cdot 1 & \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot 2 & \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} \cdot 3 & \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot 4 & \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}
 \end{array}$$

۲- تعریف ماتریس معین مثبت در کدام گزینه آمده است؟

۱. ماتریس مربعی A را معین مثبت گوئیم هرگاه برای هر بردار نا صفر X داشته باشیم $X'AX > 0$

۲. ماتریس متقارن A را معین مثبت گوئیم هرگاه برای هر بردار نا صفر X داشته باشیم $X'AX \geq 0$

۳. ماتریس متقارن A را معین مثبت گوئیم هرگاه برای هر بردار نا صفر X داشته باشیم $X'AX > 0$

۴. ماتریس مربعی A را معین مثبت گوئیم هرگاه برای هر بردار نا صفر X داشته باشیم $X'AX \geq 0$

۳- فرض کنیم V فضای ماتریس های 2×2 حقیقی روی هيات R باشد. زیر فضاهای W_1 و W_2 را به صورت زیر تعريف می کنیم. زیر فضای $W_1 \cap W_2$ در کدام گزینه آمده است؟

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -c \end{bmatrix}, a, b, c \in R \right\} \quad \text{و} \quad W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}, x, y, z \in R \right\}$$

$$\begin{array}{ll}
 \cdot 1 & \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}, x, y, z \in R \right\} \\
 \cdot 2 & \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & -z \end{bmatrix}, x, y, z \in R \right\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \cdot 3 & \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}, x, y, z \in R \right\} \\
 \cdot 4 & \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, x, z \in R \right\}
 \end{array}$$

۴- با توجه به زیر فضاهای W_1 و W_2 ، $W_1 \cap W_2$ (بعد) \dim را در کدام گزینه درج شده است؟

۱. ۴

۲. ۳

۳. ۲

۴. ۱

۵- فرض کنیم W_1 و W_2 دو زیر فضا از فضای برداری V روی هیات F باشند. در این صورت:

۱. $W_1 \cap W_2$ نیز زیر فضایی از V است. $\dim(W_1 \cup W_2) = \dim V$.۲

۳. $\dim W_2 < \dim V$.۴ $\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 - \dim W_2$.۴

۶- فرض کنیم V فضای برداری تمام توابع از میدان حقیقی R به توی R باشد. کدام یک از گزینه ها زیر فضایی از V نیست؟

۱. $W = \{f : f(3) = 0\}$.۲ $W = \{f : f(7) = f(1)\}$.۲

۳. $W = \{f : f(x) \geq 0\}$.۴ $W = \{f : f(-x) = -f(x)\}$.۴

۷- اگر V و W فضاهای برداری روی هیات F و $T: V \rightarrow W$ تبدیل خطی باشد، کدام گزینه درست است؟

۱. T یک به یک است اگر و تنها اگر $\ker T = \{0\}$.۲ اگر $T(0) \neq 0$ آنگاه T یک به یک است.

۳. بعد V بزرگتر از حاصلجمع بوجهی T و رتبه T است. .۴ اگر $T(0) = 0$ آنگاه T یک به یک است.

۸- فرض کنیم ماتریس نمایش T به صورت زیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱. T وارون پذیر است. .۲ T پوشا است. .۳ T یک به یک است. .۴ رتبه T برابر ۴ است.

۹- اگر ماتریس نمایش T^{-1} به صورت زیر باشد، تبدیل خطی $T: R^3 \rightarrow R^3$ کدام گزینه است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۱. $(x-2y+3z, y+z, 2z)$.۲ $(x-2y, y+3z, 2z)$.۲

۳. $(x-2y, y-3z, 2z)$.۴ $(x-2y+3z, y, 2z)$.۴

۱۰- اگر چند جمله ای مشخصه ماتریس A به صورت زیر باشد، در مورد این ماتریس کدام گزینه صحیح است؟

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

۱. A معکوسپذیر است.

۲. $\det(A) = 0$

۳. A ماتریس همانی است.

۴. A ماتریس قطری غالب است.

۱۱- برای محاسبه دترمینان ماتریس $A_{n \times n}$ کدامیک از روابط زیر صحیح است؟

(A_{ij} ماتریس حاصل از حذف سطر i و ستون j در ماتریس A است.)

۱. $a_{11} \dots a_{nn}$

۲. $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$

۳. $A_{1j} + A_{2j} + \dots + A_{nj}$ که در آن $1 \leq j \leq n$

۴. $A_{1j} A_{2j} \dots A_{nj}$ که در آن $1 \leq j \leq n$

۱۲- فرض کنید V فضای برداری چند جمله ای ها با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ باشد. اگر $f(t) = t + 2$ و

$g(t) = t^2 - 2t - 3$ حاصل $\langle f, g \rangle$ کدام است؟

۱. $\frac{37}{4}$

۲. $-\frac{37}{4}$

۳. $-\frac{30}{4}$

۴. $\frac{30}{4}$

۱۳- با فرض اینکه A ماتریس حقیقی $n \times n$ و X یک بردار در فضای R^n است، کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

۲. $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

۳. $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

۴. $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

۱۴- ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 14 & 11 & 14 \\ 6 & 29 & 41 \end{bmatrix}$ را به روش دولیتل به حاصلضرب LU تجزیه می کنیم درایه l_{32} (مولفه سطر ۳ و ستون ۲ در

ماتریس L) چند است؟

۱. -2

۲. 2

۳. 3

۴. 7

۱۵- تعداد ضربها در روش حذفی گاوس برای حل دستگاه معادلات خطی برابر است با؟

۱. $O(n^3)$

۲. $O(n^2)$

۳. $O(n^4)$

۴. $O(n)$

۱۶-
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
 کدامیک از نواحی زیر جز دوایر گرشگورین برای ماتریس می باشد.

۱. $R_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \leq 3\}$

۲. $R_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-7| \leq 2\}$

۳. $R_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 3\}$

۴. $R_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$

۱۷- فرض کنیم ماتریس A ، $n \times n$ و چند جمله ای مشخصه آن $p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n$ باشد، و همچنین $S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k$. با روش لوریبر می خواهیم چند جمله ای مشخصه را بیابیم. P_1 از کدام فرمول بدست می آید؟

۱. $\frac{S_2 + S_1^2}{2}$

۲. $\frac{S_2 - S_1^2}{2}$

۳. $\frac{-S_2 - S_1^2}{2}$

۴. $\frac{-S_2 + S_1^2}{2}$

۱۸- اگر $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 - 1$ چند جمله ای مشخصه ماتریس A باشد. A^{-1} برابر کدام است؟

۱. $A^3 - 2A$

۲. $A^4 - 2A^2$

۳. $A^4 - I$

۴. $A^3 - 2I$

۱۹-
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
 هرگاه

باشد. پس از یک مرحله انجام روش تکراری ژاکوبی (برای تبدیل A به ماتریس سه قطری) کدام

مولفه صفر می شود؟

۱. a_{12}

۲. a_{22}

۳. a_{31}

۴. a_{32}

۲۰- روش QR برای تبدیل یک ماتریس مربعی به ماتریسی ... است.

۱. سه قطری

۲. بالا مثلثی

۳. پایین مثلثی

۴. قطری

سوالات تشریحی

۱۴۰ نمره

۱- فرض کنید V فضای چند جمله ای ها با درجه کوچکتر یا مساوی ۴ روی هیات اعداد حقیقی باشد. با فرض

$B = \{p_0(x), \dots, p_3(x)\}$ که $P_j(x) = 1 + x + \dots + x^j$ ، نشان دهید مجموعه B یک پایه برای V می باشد. سپس

چند جمله ای $x^3 - 2x^2 + 1$ را به صورت ترکیب خطی از اعضای این پایه بنویسید.

۱-۲ فرض کنید $T: R^3 \rightarrow R^3$ تبدیل خطی باشد که توسط $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$ تعریف شده است. $\ker T$ و $\text{ran} T$ را بیابید. یک به یک و پوشا بودن T را بررسی کنید. آیا T وارونپذیر است. ۱.۴۰ نمره

۱-۳ فرض کنید V فضای با ضرب داخلی و $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامد یکه برای V باشد. نشان دهید برای هر α در V داریم $\alpha = \sum_{i=1}^n (\alpha | \alpha_i) \alpha_i$. ۱.۴۰ نمره

۱-۴ ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ را به روش چولسکی به حاصلضرب LL^T تجزیه کنید. ۱.۴۰ نمره

۱-۵ ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ را با استفاده از تبدیلات هاوس هلدر به یک ماتریس سه قطری متقارن تبدیل کنید. ۱.۴۰ نمره