

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۴۷ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۲۸ -، ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵)

۱- فرض کنیم دنباله توابع  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$  بر بازه  $[0, \pi]$  تعریف شده باشند. در اینصورت  $\|f_n(x)\|$  کدام است؟

۱.  $\frac{\pi}{2}$       ۲.  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$       ۳.  $\pi$       ۴.  $\sqrt{\pi}$

۲- اگر  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  یک مجموعه ساده از چندجمله ایها باشد که بر  $(a, b)$  نسبت به تابع وزن  $w(x)$  متعامد است، چندجمله ای درجه  $n$  ام  $\varphi_n$  بر بازه  $(a, b)$  دارای چند صفر متمایز است؟

۱. حداکثر  $n$  صفر  
۲. دقیقاً  $n$  صفر  
۳. هیچ صفری در این بازه ندارد.  
۴. دقیقاً  $2n$  صفر

۳- اگر  $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$  یک مجموعه ساده از چندجمله ایهای متعامد بوده و  $Q_m$  چندجمله ای دلخواه درجه  $m$  باشد و آن را بصورت  $Q_m = C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 + \dots + C_m\varphi_m$  بنویسیم آنگاه برای  $k = 0, 1, 2, \dots, m$  داریم:

۱.  $C_k = \frac{(Q_m, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|}$       ۲.  $C_k = \frac{(Q_m, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$       ۳.  $C_k = (Q_m, \varphi_k)$       ۴.  $C_k = \frac{Q_m}{\|\varphi_k\|}$

۴- کدام یک از مجموعه چندجمله ایهای زیر بر  $[-1, 1]$  متعامد ساده اند؟

۱. چندجمله ایهای لاگر  
۲. چندجمله ایهای چبیشف نوع اول  
۳. چندجمله ایهای چبیشف نوع دوم  
۴. چندجمله ایهای لژاندر

۵- تابع مولد دنباله توابع  $\{(x(x-1)\dots(x-n+1))/n!\}_{n=1}^{\infty}$  کدام است؟

۱.  $(1+t)^x$       ۲.  $(1-t)^x$       ۳.  $(1+tx)^x$       ۴.  $(1-tx)^x$

۶- فرض کنید  $P_n(x)$ ،  $n$ -مین چند جمله ای لژاندر باشد. در اینصورت  $P_n(-1)$  کدام است؟

۱. ۱      ۲. -۱      ۳.  $(-1)^n$       ۴. ۰

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰

سری سوال: ۱: یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۴۷ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۳۲۸ -، ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۷- کدام یک از روابط زیر مربوط به فرمول رد ریگز در مورد چند جمله ایهای لژاندار است؟

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad .2$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad .1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad .4$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2n!} \frac{d^n}{dx^n} (x - 1)^n \quad .3$$

۸- یک جواب از معادله دیفرانسیل  $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + 12y = 0$  کدام است؟

$$P_2(x) \quad .4$$

$$P_3(x) \quad .3$$

$$P_4(x) \quad .2$$

$$P_0(x) \quad .1$$

۹- تابع مولد چند جمله ایهای لژاندر کدام است؟

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}} \quad .2$$

$$F(x, t) = (1 + 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}} \quad .1$$

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad .4$$

$$F(x, t) = (1 + 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \quad .3$$

۱۰- اگر  $F(x, t)$  نشان دهنده تابع مولد چند جمله ایهای لژاندر باشد، آنگاه داریم:

$$t \frac{\partial F}{\partial x} = (x-t) \frac{\partial F}{\partial t} \quad .2$$

$$(x-t) \frac{\partial F}{\partial x} = t \frac{\partial F}{\partial t} \quad .1$$

$$(1 - 2xt + t^2)tF = F \quad .4$$

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial F}{\partial x} = tF \quad .3$$

۱۱- فرض کنید  $P_n$ ،  $n$ -مین چند جمله ای لژاندر باشد. در این صورت مقدار  $\|P_n\|^2$  برای  $n \geq 0$  کدام است؟

$$0 \quad .4$$

$$\frac{1}{2n+1} \quad .3$$

$$\frac{2}{2n+1} \quad .2$$

$$\frac{1}{2n} \quad .1$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰

سری سوال: ۱: یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۴۷ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۲۸ -، ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۱۲- فرض کنید  $L_n(x)$ ،  $n$ -مین چند جمله ای لاگر باشد. در اینصورت مقدار  $\|L_n(x)\|^2$  کدام است؟

۱.  $\frac{1}{n}$       ۲. ۱      ۳.  $\frac{1}{2n+1}$       ۴. ۰

۱۳- با استفاده از انتگرال فوریه تابع  $f(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > 1 \\ 1 & , |x| < 1 \end{cases}$  مقدار انتگرال  $\int_0^{\infty} \frac{\sin 2s}{s} ds$  کدام است؟

۱.  $\frac{\pi}{2}$       ۲.  $-\frac{\pi}{2}$       ۳.  $\frac{\pi}{4}$       ۴.  $-\frac{\pi}{4}$

۱۴- فرض کنیم  $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$  چند جمله ای چیبیشف نوع اول باشد. در اینصورت حاصل  $\|T_0\|$  کدام است؟

۱.  $\pi$       ۲.  $\frac{\pi}{2}$       ۳.  $\sqrt{\pi}$       ۴.  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

۱۵- جواب غیر بدیهی مساله با مقدار اولیه  $\begin{cases} u'' + u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(\pi) = 0 \end{cases}$  کدام است؟

۱.  $u(x) = c \sin x$       ۲.  $u(x) = c(x - \pi) \sin x$

۳.  $u(x) = c \cos x$       ۴.  $u(x) = \cosh(x)$

۱۶- جواب مساله غیرهمگن  $\frac{d^2u}{dx^2} + \pi^2 u = 1$  با شرایط  $u(1) = u(0) = 0$  کدام است؟

۱.  $\frac{1}{\pi^2} \cos x + \sin x$       ۲.  $\frac{1}{\pi^2} \sin x + \cos x$

۳.  $\frac{1}{\pi^2} \cos \pi x + \frac{2x-1}{\pi^2}$       ۴. جواب ندارد.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۴۷ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۳۲۸ -، ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۱۷- تابع گرین مساله با مقدار مرزی  $\frac{d^2u}{dx^2} = f(x)$  در بازه  $[0, 1]$  با شرایط  $u(1) = u(0) = 0$  کدام است؟

$$G(x; \xi) = \begin{cases} x(\xi^2 - 1) & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi(x - 1) & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad .^2 \quad G(x; \xi) = \begin{cases} x^2(\xi - 1) & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi(x^2 - 1) & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad .^1$$

$$G(x; \xi) = \begin{cases} \xi(x - 1) & 0 \leq x \leq \xi \\ x(\xi - 1) & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad .^4 \quad G(x; \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi(x - 1) & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad .^3$$

۱۸- مقادیر ویژه منفی مساله  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$  برای  $0 \leq x \leq \pi$  با شرایط  $y(0) = 0$  و  $y'(\pi) = 0$  کدام است؟

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{که در آن} \quad \left(\frac{2n+1}{2}\right)^3 \quad .^2 \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{که در آن} \quad \left(\frac{2n-1}{2}\right)^3 \quad .^1$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{که در آن} \quad \frac{2n+1}{2} \quad .^3 \quad .^4 \quad \text{مساله دارای مقادیر ویژه منفی نمی باشد.}$$

۱۹- معادله دیفرانسیل مربوط به خانواده تمام سطوح دوار حول محور  $Z$  کدام است؟

$$yp - xq = 0 \quad .^1 \quad yp = 0 \quad .^2 \quad xq = 0 \quad .^3 \quad yp + xq = 0 \quad .^4$$

۲۰- منحنیهای شاخص معادله  $yz_{xx} + (x+y)z_{xy} + xz_{yy} = 0$  کدام هستند؟

$$\xi = y + x, \eta = y^2 - x^2 \quad .^2 \quad \xi = y - x, \eta = y^2 - x^2 \quad .^1$$

$$\xi = y + x, \eta = y^2 + x^2 \quad .^4 \quad \xi = y - x, \eta = y^2 + x^2 \quad .^3$$

### سوالات تشریحی

۱۰۴۰ نمره

۱- فرض کنیم  $\lambda$  یک عدد حقیقی باشد. در اینصورت مقادیر ویژه و توابع ویژه مساله  $y''(x) + \lambda y(x) = 0$  برای  $0 \leq x \leq 1$  با شرایط  $y(0) = 0$  و  $y(1) + y'(1) = 0$  را پیدا کنید.

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۵۰ تشریحی: ۷۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی  
رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۴۷ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۳۲۸ -، ژئوفیزیک-شاخه زلزله شناسی ۱۱۲۴۰۲۵

۱.۴۰ نمره

۲- سری فوریه تابع  $f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi$  را نوشته و به کمک آن مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$  را به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

۳- سطح انتگرالی از معادله  $(y + zx)p + (x + yz)q = z^2 - 1$  که از سهمی  $x = t, y = 1, z = t^2$  می گذرد را بدست آورید.

۱.۴۰ نمره

۴- یک جواب خصوصی مسئله ناهمگن  $z_{xx} - z_{yy} + 2z_x + z = 2\sin(2x + y) - x^2y$  را بدست آورید.

۱.۴۰ نمره

۵- انتگرال فوریه کسینوسی تابع  $f(x) = e^{-x}$  برای  $x \geq 0$  را بدست آورید.