

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۵۱-، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۳

۱- کدامیک از معادلات زیر خطی می باشد؟

$$2x'' - 3x' + 5x = e^t \quad .1 \quad x''' + x''x' - 4x = t \quad .2 \quad e^{x'} - 3x' + 5x = t \quad .3 \quad \frac{x'' + x'}{x' - x} = t \quad .4$$

۲- کدامیک از دستگاه معادلات زیر خودگردان است؟

$$\begin{cases} x_1' = tx_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases} \quad .1 \quad \begin{cases} x_1' = tx_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - tx_2 \end{cases} \quad .2 \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases} \quad .3 \quad \begin{cases} x_1' = x_1 - t^2 x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 \end{cases} \quad .4$$

۳- فضای خطی نرمدار X را کامل نامیده می شود هرگاه

۱. هر دنباله همگرا از آن کوشی باشد.
۲. هر دنباله کوشی از آن همگرا باشد.
۳. هر دنباله کراندار از آن همگرا باشد.
۴. هر دنباله کراندار از آن دارای زیردنباله همگرا باشد.

۴- اگر تابع $g(t, u)$ روی ناحیه D تعریف شده باشد، در اینصورت کدام گزاره زیر درست می باشد؟

۱. اگر g روی D در شرط لیبشیتز صدق کند آنگاه $\frac{\partial g}{\partial u}$ روی D پیوسته است.
۲. اگر $\frac{\partial g}{\partial u}$ روی D پیوسته باشد آنگاه g روی D در شرط لیبشیتز صدق می کند.
۳. $\frac{\partial g}{\partial u}$ روی D پیوسته است اگر و تنها اگر g روی D در شرط لیبشیتز صدق کند.
۴. اگر $g(t, u)$ روی ناحیه D در قضیه مقدار میانگین صدق کند در شرط لیبشیتز صدق می کند.

۵- اگر $0 < c < 1$ و u و v توابع نامنفی پیوسته روی $[t_0, t_0 + a]$ باشند که در نامساوی

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

صدق کنند آنگاه برای هر $t \in [t_0, t_0 + a]$ کدام نامساوی زیر برقرار است؟

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t v(s)ds \quad .1 \quad u(t) \leq C \int_{t_0}^t v(s)ds \quad .2 \quad u(t) \leq C + e^{\int_{t_0}^t v(s)ds} \quad .3 \quad u(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t v(s)ds} \quad .4$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۶- اگر $v, w \in C[J_1, R]$ در نابرابری های $D_v(t) \leq g(t, v(t))$ و $D_w(t) > g(t, w(t))$ با شرط $(t, v(t)), (t, w(t)) \in \Omega$ روی J_1 صدق کنند که در آن Ω مجموعه بازی از R^2 است. در این صورت از $v(t_0) < w(t_0)$ کدام گزینه برای هر $t \in J$ نتیجه می شود؟

۱. $v(t) \leq w(t)$.۲. $v(t) \geq w(t)$.۳. $v(t) < w(t)$.۴. $v(t) > w(t)$

۷- اگر S یک زیرمجموعه بسته یک فضای باناخ B باشد و T نگاشتی انقباضی از S در S باشد آنگاه در مورد T کدام گزینه درست نمی باشد؟

۱. پیوسته است. ۲. کراندار است. ۳. نقطه ثابت دارد. ۴. برد آن بسته است.

۸- کدام گزینه درست نیست؟

۱. ماتریسهای متشابه چندجمله ای مشخصه یکسان دارند. ۲. دو ماتریس متشابه مقادیر ویژه یکسانی دارند. ۳. تمام ماتریسهای متشابه وارون پذیر می باشند. ۴. هر ماتریس مربعی $n \times n$ حداکثر n مقدار ویژه دارد.

۹- شرط لازم و کافی برای این که یک جواب ماتریسی $\phi(t)$ از $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ یک ماتریس اصلی برای $X' = A(t)X$ باشد این است که برای هر $t \in (r_1, r_2)$ داشته باشیم

۱. $W(t) = 0$.۲. $W(t) \neq 0$.۳. $W(t) = 1$.۴. $W(t) \neq 1$

۱۰- اگر ϕ یک ماتریس اصلی $X' = A(t)X$ باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه ψ یک ماتریس اصلی دستگاه $X' = -A^T(t)X$ است آن است که

۱. ماتریس نامنفرد C وجود داشته باشد که $\psi^T \phi = C$.
۲. ماتریس منفرد C وجود داشته باشد که $\psi^T \phi = C$.
۳. ماتریس نامنفرد و ثابت C وجود داشته باشد که $\psi^T \phi = C$.
۴. ماتریس منفرد و ثابت C وجود داشته باشد که $\psi^T \phi = C$.

۱۱- شرط هوروتیز در مورد چندجمله ای $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ کدام است؟

۱. $a_1 > 0$ $a_2 > 0$ $a_3 > 0$.۲. $a_1 < 0$ $a_2 < 0$ $a_3 < 0$
۳. $a_1 > 0$ $a_2 > 0$ $a_3 > 0$ و $a_1a_2 - a_3 < 0$.۴. $a_1 > 0$ $a_2 > 0$ $a_3 > 0$ و $a_1a_2 - a_3 > 0$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ - ، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۱۲- چند جمله ای مشخصه یک معادله خطی با ضرایب ثابت را پایدار نامیده می شود هر گاه

۱. تمام ریشه های آن منفی باشند.
۲. تمام ریشه های آن مثبت باشند.
۳. تمام قسمت های حقیقی ریشه های آن منفی باشند.
۴. تمام قسمت های حقیقی ریشه های آن مثبت باشند.

۱۳- هر گاه جواب $x(t)$ معادله $x' = F(t, x)$ پایدار باشد و عددی چون $\delta_0 > 0$ وجود داشته باشد که از $\|x_0 - \bar{x}_0\| < \delta_0$

نتیجه می شود $\|x(t) - \bar{x}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ این جواب چه نوع جوابی است؟

۱. پایدار مجانبی
۲. یکنواخت - پایدار
۳. مجانباً یکنواخت - پایدار
۴. قوی - پایدار

۱۴- اگر قسمت حقیقی هر یک از ویژه-مقادیر ماتریس $A = (a_{ij})$ منفی باشند آنگاه تمام جوابهای معادله $x' = Ax$ چه نوع می باشند؟

۱. مجانباً پایدار
۲. ناپایدار
۳. یکنواخت - پایدار
۴. قوی - پایدار

۱۵- شرط لازم و کافی برای اینکه تمام جوابهای دستگاه $x' = A(t)x$ که در آن $A(t)$ ماتریس $n \times n$ و پیوسته بر $[0, \infty)$ و x یک n - بردار است پایدار باشند آن است که

۱. پیوسته باشند.
۲. کراندار باشند.
۳. پیوسته یکنواخت باشند.
۴. هم پیوسته باشند.

۱۶- نقطه بحرانی $(0,0)$ دستگاه $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$ از چه نوع است؟

۱. ناپایدار
۲. پایدار
۳. مجانباً پایدار
۴. کانون پایدار

۱۷- کدام شرط کافی است تا تمام جوابهای معادله $u'' + (1+b(t))u = 0$ روی $[0, \infty)$ کراندار باشند؟

۱. $b(t)$ کراندار باشد.
۲. $b(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$
۳. $b(t)$ پیوسته باشد.
۴. $\int_0^{\infty} |b(t)| dt < \infty$

۱۸- جوابهای نابدیهی معادله $u'' + \varphi(t)u = 0$ نوسانی هستند مشروط به اینکه به ازای هر t داشته باشیم

۱. $\varphi(t) \leq 0$
۲. $\varphi(t) \geq 0$
۳. $\varphi(t) \leq m < 0$
۴. $\varphi(t) \geq m^2 > 0$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) (۱۱۱۰۵۱ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳)

۱۹- تابع $V(t, x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \sin^2 t$ چه نوع است؟

۱. نیمه معین مثبت و کاهنده است.
۲. نیمه معین مثبت است ولی کاهنده نیست.
۳. معین مثبت و کاهنده است.
۴. معین مثبت است ولی کاهنده نیست.

۲۰- اگر جواب صفر دستگاه خطی $x' = A(t)x$ تماما پایدار باشد آنگاه

۱. مجانباً پایدار است.
۲. مجانباً یکنواخت - پایدار است.
۳. یکنواخت - پایدار است.
۴. قویا - پایدار است.

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- اگر توابع u و v در بازه $[t_0, t_0 + a]$ پیوسته و نامنفی باشند همچنین اگر تابع $f(t)$ روی بازه $[t_0, t_0 + a]$ مثبت، پیوسته و نا نزولی باشد باشد و در نابرابری زیر صدق کند

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

آنگاه ثابت کنید

$$u(t) \leq f(t) \exp\left(\int_{t_0}^t v(s)ds\right) \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

۱.۴۰ نمره

۲- جواب عمومی معادله $y''' - 3y' + 2y = 9e^t \quad t > 0$ را بدست آورید.

۱.۴۰ نمره

۳- اگر $a(t)$ روی $[0, \infty)$ تابعی پیوسته - مشتقپذیر باشد و بطور یکنوا $a(t) \rightarrow \infty$ آنگاه ثابت کنید تمام جوابهای معادله $u'' + a(t)u = 0$ روی $[0, \infty)$ کراندارند.

۱.۴۰ نمره

۴- اگر $\|u\|$ و $\|u''\|$ کراندار باشند آنگاه ثابت کنید $\|u\|$ کراندار است.

۱.۴۰ نمره

۵- اگر تابع معین مثبت اسکالری چون $V(x)$ وجود داشته باشد که روی S_p داشته باشیم $V^*(x) \leq 0$ آنگاه ثابت کنید جواب صفر $x' = f(x)$ پایدار است.