تعداد سوالات : تستی : ۲۰ **تشریحی :** ۵ | **زمان آزمون (دقیقه) : تستی :** ۶۰ **تشریحی :** ۶۰ | **سری سوال :** یک ۱

عنـــوان درس : ریاضیات گسسته

رشته تحصیلی/کد درس : ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۵۹ - ، آموزش ریاضی۱۱۱۱۲۸۵

سوالات تشریحی

۱- $m+1m+1$ عدد صحیح مثبت $2^1-1, 2^2-1, \dots, 2^m-1, 2^{m+1}-1$ ۱،۴۰ نمره

$2^1-1, 2^2-1, \dots, 2^m-1, 2^{m+1}-1$ را در نظرمی گیریم بنا براصل لانه کبوترو الگوریتم تقسیم ,اعدادی

مانند $s,t \in \mathbb{Z}^+ s,t \in \mathbb{Z}^+$ وجود دارند به طوری که $1 \le s < t \le m+۱$ واعداد 2^s-1 و 2^t-1

$1 \le s < t \le m+۱$ واعداد 2^s-1 و 2^t-1 در تقسیم بر mm باقیمانده ای یکسان دارند.بنابراین ,دو عدد

$q_1, q_2 \in \mathbb{N}\, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ وجوددارند به طوری که $2^s-1=q_1m+r\, 2^s-1=q_1m+r$ و

$2^t-1=q_2m+r\, 2^t-1=q_2m+r$ ودر نتیجه , $(2^t-1)-(2^s-1)=(q_2m+r)-(q_1m+r)$

$(2^t-1)-(2^s-1)=(q_2m+r)-(q_1m+r)$;از این رو , $2^t-2^s=(q_2-q_1)$

$2^t-2^s=(q_2-q_1)$. ولی $2^t-2^s=2^s(2^{t-s}-1)\, 2^t-2^s=2^s(2^{t-s}-1)$; وچون mm فرد است,

وچون $(m,2^s)=1\,(m,2^s)=1$ بنابراین $m|(2^{t-s}-1)\, m|(2^{t-s}-1)$ با انتخاب $n=t-s\, n=t-s$

نتیجه مطلوب حاصل می شود.

۲- به ازای $0 \leq n \leq 4$ $0 \leq n \leq 4$ داریم: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8$ ۱،۴۰ نمره

$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 8$ (به عنوان مثال $a_3 = 5$ $a_3 = 5$ چرا که زیر مجموعه هایی از $X = \{1,2,3\}$ $X = \{1,2,3\}$ که شامل هیچ دو عدد صحیح متوالی نیستند عبارتند از $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}$ $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}$)این پنج جمله نخست یادآور دنباله فیبوناتچی هستند.حال حالت کلی را به صورت زیر دنبال می کنیم.

فرض کنید $n \geq 2$ $n \geq 2$ و $S = \{1,2,\dots,n-2,n-1,n\}$ $S = \{1,2,\dots,n-2,n-1,n\}$. اگر بنا باشد که $A \subseteq S$ $A \subseteq S$ در a_n a_n به حساب آید دو حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

۱. $n \in A$ $n \in A$: که در این صورت, $(n-1) \notin A$ و $(n-1) \notin A$ و $A - \{n\}$ $A - \{n\}$ در a_{n-2} a_{n-2} به حساب می آید.

۲. $n \notin A$ $n \notin A$: که در این حالت A A در a_{n-1} a_{n-1} به حساب خواهد آمد.

لذا بنا به این دو حالت فراگیر داریم: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ که در آن $n \geq 2$ $n \geq 2$ و $a_0 = 1, a_1 = 2$ $a_0 = 1, a_1 = 2$ که رابطه بازگشتی مطلوب است.

اما بنا به یکی از تمرین های کتاب درسی داریم:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right], n \geq 0$$

۳- مثال $3-2-1$ قسمت (د) صفحه 158. ۱،۴۰ نمره

۴- قضیه $4-4-2$ صفحه 241. ۱،۴۰ نمره

۵- الف : قضیه $7-2-3$ صفحه 388 و (ب) : قضیه $7-2-5$ صفحه 389. ۱،۴۰ نمره