

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۱۰۵۱ - ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۳

سوی سوال: یک ۱

۱- کدامیک از نگاشتهای زیر تبدیل خطی می باشد؟

$$\begin{cases} T: R^2 \rightarrow R \\ T(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \end{cases} .\cdot ۲$$

$$\begin{cases} T: R^2 \rightarrow R \\ T(x_1, x_2) = x_1 x_2 \end{cases} .\cdot ۱$$

$$\begin{cases} T: R^2 \rightarrow R \\ T(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 \end{cases} .\cdot ۴$$

$$\begin{cases} T: R^2 \rightarrow R \\ T(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 1 \end{cases} .\cdot ۳$$

۲- کدامیک از مجموعه های زیر باز می باشد؟

$$\{x \in R^2 : \|x\| < 1\} .\cdot ۴ \quad \{x \in R^2 : \|x\| \geq 1\} .\cdot ۳ \quad \{x \in R^2 : \|x\| \leq 1\} .\cdot ۲ \quad \{x \in R^2 : \|x\| = 1\} .\cdot ۱$$

۳- کدامیک از گزاره های زیر نادرست است؟

۱. مجموعه S را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز آن یک زیر پوشش شمارش پذیر داشته باشد.

۲. مجموعه S را فشرده گوییم هر گاه هر پوشش باز آن یک زیر پوشش متناهی داشته باشد.

۳. هر گویی باز یا بسته در یک فضای نرمدار همواره محدب است.

۴. یک مجموعه S در R^n فشرده اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد.

۴- شرط لیپشیتز برای یگانگی جواب چه نوع شرطی است؟

۱. لازم .۲. لازم و کافی .۳. کافی .۴. نه لازم و نه کافی

۵- نام قضیه زیر کدام است؟

"فرض کنید تابعی چون $f(t, x)$ روی $B_0: t_0 \leq t \leq t_0 + a$ و $\|x - x_0\| \leq b$ اعداد حقیقی مثبتی

هستند، پیوسته باشد و در شرط لیپشیتز صدق کند. اگر $M = \max\|f(t, x)\|$ آنگاه مساله

$x' = f(t, x)$ در $[t_0, t_0 + a]$ یک جواب یگانه دارد.

۱. پیکار- لیندلوف .۲. لیپشیتز .۳. کوشی- پناآو .۴. جی اسکولی

۶- فرض کنید توابع $v, w \in C[J, R]$ در نابرابریهای $D_v(t) \leq g(t, v(t))$ و $D_w(t) > g(t, w(t))$ با شرط

روی $J_1: (t, v(t)), (t, w(t)) \in \Omega$ صدق کنند. در این صورت از $v(t_0) < w(t_0)$ نتیجه می شود

$v(t) > w(t) \quad t \in J$.۴ $v(t) \geq w(t) \quad t \in J$.۳ $v(t) < w(t) \quad t \in J$.۲ $v(t) \leq w(t) \quad t \in J$.۱

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۵۱ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۳

سوی سوال: ۱ یک

-۷ اگر تابع u روی $[0, t]$ پیوسته و نامنفی باشد و در نامساوی صدق کنند. آنگاه کدام گزینه روی این درست است؟

$$u(t) \leq te^{t^2} \quad .\text{۴} \quad u(t) \leq te^{2t^2} \quad .\text{۳} \quad u(t) \leq t + e^{2t^2} \quad .\text{۲} \quad u(t) \leq t + e^{t^2} \quad .\text{۱}$$

-۸ کدامیک گزینه درست است؟

۱. هر تابع پیوسته یک تابع انقباض می باشد.
۲. هر تابع پیوسته روی یک فضای بanax یک نقطه ثابت دارد.
۳. هر تابع انقباض یک تابع پیوسته است.
۴. هر تبدیل خطی انقباضی می باشد.

-۹ کدام گزینه نادرست است؟

۱. هر ماتریس مربعی $n \times n$ حداقل n مقدار ویژه دارد.
۲. ماتریسهای متشابه چند جمله‌ای مشخصه یکسانی دارند.
۳. دو ماتریس متشابه مقادیر ویژه یکسانی دارند.
۴. دو ماتریس متشابه باشند وارون پذیرند.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{مقادیر ویژه ماتریس} \quad \text{کدام است؟} \quad -\text{۱۰}$$

$$-1 \quad -2+3i \quad -2-3i \quad .\text{۲} \quad 1 \quad -2 \quad 3 \quad .\text{۱}$$

$$1 \quad -1+i \quad -1-i \quad .\text{۴} \quad 1 \quad -2+i \quad -2-i \quad .\text{۳}$$

-۱۱ کدامیک از توابع زیر مستقل خطی می باشند؟

$$e^x \quad 3e^x \quad 2e^x \quad .\text{۴} \quad e^x \quad 3e^x \quad 2e^{2x} \quad .\text{۳} \quad e^x \quad 3e^x \quad e^{2x} \quad .\text{۲} \quad e^x \quad e^{3x} \quad e^{2x} \quad .\text{۱}$$

-۱۲ یک شرط لازم و کافی برای این که یک جواب ماتریس $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ از $\phi(t)$ یک ماتریس اصلی برای $X' = A(t)X$ باشد. این است که برای هر $t \in (r_1, r_2)$ داشته باشیم

$$w(t) = 0 \quad .\text{۴} \quad w(t) \neq 0 \quad .\text{۳} \quad w(t) \neq 1 \quad .\text{۲} \quad w(t) = 1 \quad .\text{۱}$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۵۱ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۴۳۳

۱۳- اگر φ یک ماتریس اصلی $X' = A(t)X$. آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $\psi^T \varphi = C$ یک ماتریس اصلی دستگاه $X' = -A^T(t)X$ است این که

۱. ماتریس نامنفرد C وجود داشته باشد که

۲. ماتریس منفرد C وجود داشته باشد که

۳. ماتریس نامنفرد و ثابت C وجود داشته باشد که

۴. ماتریس منفرد و ثابت C وجود داشته باشد که

۱۴- کدامیک از چند جمله ایها زیر پایدار است؟

$$L(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 \quad .2$$

$$L(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3 \quad .1$$

$$L(t) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 3 \quad .4$$

$$L(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 6\lambda + 2 \quad .3$$

۱۵- جواب صفر (یا هر جواب دیگر) معادله $u' = 0$

۱. مجانباً پایدار است.

۲. مجانباً یکنواخت پایدار است.

۳. قویاً پایدار است.

۴. ناپایدار است.

۱۶- نوع پایداری نقطه بحرانی $(0,0)$ دستگاه $\begin{cases} x'_1 = -3x_1 + x_2 \\ x'_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$ کدام گزینه است؟

۱. زینی

۲. مجانباً پایدار

۳. ناپایدار

۴. قویاً پایدار

۱۷- کدام گزینه درست می باشد؟

۱. اگر $\|u'\|$ و $\|u''\|$ کراندار باشند. آنگاه $\|u\|$ کراندار است.

۲. اگر $\|u'\|$ و $\|u''\|$ کراندار باشند. آنگاه $\|u\|$ کراندار است.

۳. اگر $\|u'\|$ و $\|u''\|$ کراندار باشند. آنگاه $\|u\|$ کراندار است.

۱۸- جوابهای نابدیهی معادله $u'' + \varphi(t)u = 0$ نوسانی هستند مشروط به اینکه به ازای هر t ,

$$\varphi(t) \geq 1 \quad .4$$

$$\varphi(t) \geq m^2 > 0 \quad .3$$

$$\varphi(t) \geq 0 \quad .2$$

$$\varphi(t) > 0 \quad .1$$

تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵ زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

عنوان درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

رشته تحصیلی/گد درس: ریاضی (کاربردی)، ریاضی (محض) ۱۱۱۰۵۱ -، ریاضیات و کاربردها ۱۱۱۱۴۳۳

سوال سوال: ۱ یک

$$-19 \quad \text{نوع تابع } V(t, x_1, x_2) = x_1^2 + (1+t)x_2^2 \quad \text{کدام گزینه است؟}$$

۱. نیمه معین مثبت

۲. کاهنده

۳. معین منفی

۴. معین مثبت

-۲۰ اگر معادله دیفرانسیل $4x'' + 8x' + 12x = 0$ را بصورت دستگاه ماتریسی $x' = Ax$ بنویسیم، کدام گزینه است؟

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره -۱ اگر $\frac{\partial g}{\partial u}$ روی D پیوسته باشد. آنگاه ثابت کنید عدد ثابتی K وجود دارد بطوریکه $|g(t, u_1) - g(t, u_2)| \leq K|u_1 - u_2| \quad (t, u_1), (t, u_2) \in D$

۱.۴۰ نمره -۲ جواب عمومی معادله $y''' - 3y' + 2y = 9e^t, t > 0$ را بدست آورید.

۱.۴۰ نمره -۳ اگر قسمتهای حقیقی تمام ویژه - مقادیر A منفی باشند آنگاه ثابت کنید به ازای هر جواب $x(t)$ از $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ داریم $X' = AX$

۱.۴۰ نمره -۴ فرض می کنیم $b(t)$ روی $[0, \infty)$ پیوسته - مشتقپذیر باشد و $\int_0^\infty |b'(s)|ds \rightarrow 0$ کراندار باشد. در این صورت ثابت کنید تمام جوابهای $u'' + (1+b(t))u = 0$ روی $[0, \infty)$ کراندارند.

۱.۴۰ نمره -۵ پایداری جواب صفر دستگاه $\begin{cases} x'_1 = -x_1 - x_2 - x_1^3 \\ x'_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$ را تعیین کنید.